

THESE

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

pour l'obtention du

DOCTORAT

INGENIERIE DU TRAITEMENT ET DE L'EPURATION DES EAUX

par

Patrice CHATELLIER

Ingénieur I.N.S.A.

**SIMULATION DE L'HYDRODYNAMIQUE DES CHENAUX
D'OXYDATION PAR L'UTILISATION DES EQUATIONS
DE NAVIER-STOKES ASSOCIEES AU MODELE k- ϵ :
EVALUATION DE LA VITESSE DE CIRCULATION**

Soutenue le 20 Décembre 1991 devant la commission d'examen

MM. : J.M. AUDIC
J. BERTRAND
H. BOISSON
C. BROUSDICOU
C. FONADE
M. ROUSTAN

Ingénieur, Lyonnaise des Eaux-Dumez
Directeur de Recherches CNRS
Chargé de Recherches, CNRS
Professeur INSA Toulouse
Professeur INSA Toulouse
Professeur INSA Toulouse

NOM : CHATELLIER

Prénom : Patrice

Simulation de l'hydrodynamique des chenaux d'oxydation par l'utilisation des équations de Navier-Stokes associées au modèle k- ϵ : évaluation de la vitesse de circulation. 220 pages, Thèse de Doctorat

Ingénierie du Traitement et de l'Épuration des Eaux

INSA Toulouse, 1991, n° d'ordre

RESUME : L'étude porte sur l'évaluation de la vitesse moyenne de circulation et des profils de vitesse moyenne à l'intérieur de chenaux d'oxydation. Seul le cas d'un écoulement monophasique a été traité.

Cette étude présente deux méthodes de modélisation que nous qualifierons de macroscopique :

- le bilan global de quantité de mouvement,
- les principes de l'agitation mécanique en cuve agitée cylindrique, et une microscopique basée sur les équations de Navier-Stokes.

La dernière de ces trois approches est particulièrement détaillée. Nous avons notamment exposé le raisonnement et les approximations sur lesquels est basé le modèle k- ϵ , les conditions aux limites utilisées, la méthode numérique des éléments finis et les techniques de stabilisation et de résolution qui lui sont associées. Ensuite, nous avons appliqué cette méthode à l'aide du logiciel FIDAP sur les six cas expérimentaux suivants : écoulement turbulent dans un tube, le jet dans un milieu infini, la cuve agitée cylindrique, un bassin annulaire de 2800m³, un bassin annulaire de 860m³, un chenal oblong de 1m³. Les résultats de chacune de ces simulations sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

MOTS CLES :

Mécanique des fluides ; Simulation ; Hydrodynamique ; Turbulence ; Traitement des eaux ; Canal d'oxydation

JURY et date de soutenance :

MM. AUDIC J.M.	Ingénieur Lyonnaise des Eaux-Dumez - LE PECQ
BERTRAND J.	Directeur Recherche CNRS TOULOUSE
BOISSON H.	Chargé de Recherche CNRS TOULOUSE
BRODISCOU C.	Professeur INSA TOULOUSE
FONADE Ch.	Professeur INSA TOULOUSE
ROUSTAN M.	Professeur INSA TOULOUSE

20 Décembre 1991

DEPOT à la bibliothèque universitaire en exemplaires.

A mes parents.

Ce travail a été effectué dans le Laboratoire de Chimie et Génie de l'Environnement du département de Génie des Procédés Industriels de l'INSA de Toulouse, en collaboration avec le Centre International de Recherche Sur l'Eau et l'Environnement de la Lyonnaise des Eaux.

Je remercie sincèrement Monsieur M. ROUSTAN et Monsieur J.M. AUDIC pour la confiance qu'ils m'ont apportée et les moyens importants qu'ils ont mis à ma disposition.

Je tiens à remercier également Monsieur D. NICOLAS pour sa patience, sa gentillesse et sa disponibilité ainsi que pour le savoir qu'il m'a transmis. Un grand merci également à tous les membres du service informatique de l'INSA pour leur sympathie et la chaleur humaine qu'ils m'ont apportée.

Je remercie Monsieur C. FONADE pour l'accueil toujours enthousiaste qu'il m'a réservé, pour les conseils précieux qu'il m'a prodigués ainsi que pour le savoir qu'il m'a transmis.

Je remercie Monsieur H. BOISSON pour son accueil chaleureux, pour le savoir qu'il m'a si efficacement transmis ainsi que pour l'aide matérielle qu'il a pu me fournir.

Je remercie Monsieur C. BROUDISCOU pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury.

Un grand merci à Messieurs Ph. BELLAN, G. CARACCI et J.C. LAFFITTE pour m'avoir fait partager leurs connaissances, leurs expériences ainsi que leur joie de vivre.

Merci à mes collègues de l'INSA : Frédéric, Jérôme, Laura, Roland, Sylvie, Véronique, Xavier B., Xavier M. et Yves ainsi qu'à mon cousin Frédéric pour leur amitié.

Merci également à Danièle et Philippe qui ont contribué à rendre la rédaction de cette thèse plus agréable.

P. CHATELLIER, M. ROUSTAN, J.M. AUDIC

Utilisation de la C.F.D. pour prédire les écoulements engendrés dans des bassins par des mobiles d'agitation.

3ème Congrès français de Génie des Procédés, Septembre 1991.

P. CHATELLIER, M. ROUSTAN, J.M. AUDIC

Circulation induced by horizontal agitators in closed loop open channel.

7th European congress on mixing, Bruges, Septembre 1991.

M. ROUSTAN, P. CHATELLIER, J.M. AUDIC, F.R. LEFEVRE, F. BURVINGT

Separation of the two functions aeration and mixing in oxidation ditches : application to the denitrification by activated sludge.

IAWPRC Washington, Mai 1992.

P. CHATELLIER, M. ROUSTAN, J.M. AUDIC

Circulation liquide engendrée par des jets d'eau dans un chenal d'oxydation.

Forum Agitation Industrielle, 27 au 29 Janvier 1992.

PLAN

Introduction Générale

CHAPITRE A. Approches empiriques

I. INTRODUCTION	9
II. APPLICATION DU BILAN GLOBAL DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT	9
III. APPROCHE DE TYPE AGITATION	13
IV. CONFRONTATION à L'EXPÉRIENCE	15
<i>IV.1. INTRODUCTION</i>	15
<i>IV.2. CAS D'UN BASSIN DE 2800 m³</i>	15
<i>IV.2.1. Description du bassin</i>	15
<i>IV.2.2. Résultats expérimentaux</i>	17
<i>IV.2.3. Application du bilan global de quantité de mouvement</i>	19
<i>IV.2.4. Approche de type agitation</i>	20
<i>IV.3. CAS D'UN BASSIN DE 860 m³</i>	21
<i>IV.3.1. Description du bassin</i>	21
<i>IV.3.2. Résultats expérimentaux</i>	22
<i>IV.3.3. Application du bilan global de quantité de mouvement</i>	22
<i>IV.3.4. Approche de type agitation</i>	23
<i>IV.4. CAS D'UN BASSIN DE 1 m³</i>	23
<i>IV.4.1. Description du bassin</i>	23
<i>IV.4.2. Résultats expérimentaux</i>	26
<i>IV.4.3. Application du bilan global de quantité de mouvement</i>	26
<i>IV.4.4. Approche de type agitation</i>	28
V. SYNTHÈSE - CONCLUSION	28

CHAPITRE B. Etude Théorique de la turbulence

I. INTRODUCTION	33
II. ETUDE THÉORIQUE	34
II.1. ECRITURE DES ÉQUATIONS	34
II.2. LA TURBULENCE VUE SOUS SON ASPECT SPECTRAL	36
II.2.1. Description des structures turbulentes	36
II.2.2. Ecriiure d'une équation spectrale simplifiée	37
II.2.3. Le phénomène de cascade d'énergie	38
II.2.4. La notion d'échelle en turbulence	39
II.2.5. L'hypothèse de l'échelle unique	40
II.3. EQUATION DE POISSON POUR LA PRESSION	40
II.4. LE TERME DE CORRÉLATION PRESSION VITESSE : Φ_{ij}	41
II.4.1. Décomposition du terme Φ_{ij}	41
II.4.2. Le tenseur d'anisotropie : a_{ij}	42
II.4.3. Le terme non linéaire : Φ_{ij1}	43
II.4.3.1. Modélisation proposée par Rotta	43
II.4.3.2. Modélisation proposée par Lumley	44
II.4.4. Le terme linéaire : Φ_{ij2}	44
II.4.4.1. Le "Quasi Isotropic Model"	45
II.4.4.2. Le "Izotropisation of Production Model"	45
II.5. LE TERME DE DISSIPATION : ϵ_{ij}	46
II.5.1. Introduction du terme ϵ	46
II.5.2. L'équation de transport de ϵ	46
II.6. LE TERME DE DIFFUSION : d_{ij}	48
II.6.1. Introduction du terme $\overline{u_i u_j u_k}$	48
II.6.2. Modélisation de $\overline{u_i u_j u_k}$	48
II.7. L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE : k	49
III. LES MODELES DE TURBULENCE	50
III.1. QUELQUES CONCEPTS IMPORTANTS	50
III.1.1. Description de la turbulence	50
III.1.2. Le concept de viscosité turbulente	51
III.1.3. Le concept de diffusivité turbulente	52
III.2. LES MODELES A ZÉRO ÉQUATION	52
III.2.1. Les modèles de longueur de mélange	52
III.2.2. Le modèle d'écoulement libre en cuve	54

III.3. LES MODELES A UNE ÉQUATION	55
III.4. UN MODELE A DEUX ÉQUATIONS : LE MODELE $k-\epsilon$	57
IV. CONDITIONS AUX LIMITES	57
IV.1. INTRODUCTION	57
IV.2. LES ENTRÉES ET LES SORTIES LIBRES DE FLUIDES	58
IV.3. LES SURFACES LIBRES	58
IV.4. LES PAROIS	58
IV.4.1. Introduction	58
IV.4.2. Description de l'écoulement de paroi	58
IV.4.3. Conditions aux limites utilisées	62
VI.5. LES JETS	62
IV.6. LES HÉLICES	63

CHAPITRE C. Etude numérique

I. INTRODUCTION	67
II. HISTORIQUE ET INTÉRÊT DE LA TECHNIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS	67
III. DESCRIPTION DE LA TECHNIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS	68
III.1. PASSAGE DU PROBLEME DIFFÉRENTIEL AU PROBLEME INTÉGRAL	68
III.2. FORMALISATION	72
III.3. L'APPROXIMATION VARIATIONNELLE	73
III.4. ETUDE DE LA BASE ψ DE L^h	76
III.5. ETUDE DE LA BASE φ^c DE V_c^h	76
III.5.1. Introduction	76
III.5.2. Éléments à deux dimensions	77
III.5.3. Éléments à trois dimensions	78
III.6. ETUDE DE LA BASE φ^p DE V_p^h	79
IV. MÉTHODE DE RÉOLUTION	81
IV.1. INTRODUCTION	81
IV.2. LA MÉTHODE DE RÉOLUTION	81
IV.3. LE "STREAMLINE-UPWINDING"	83

CHAPITRE D. Résultats

I. INTRODUCTION	87
II. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A L'INTÉRIEUR D'UN TUBE	87
II.1. INTRODUCTION	87
II.2. L'EXPÉRIENCE DE LAUFER	88
II.2.1. Introduction	88
II.2.2. Résultats expérimentaux	88
II.2.3. Modélisation à l'aide du modèle k-ε	92
II.2.4. Conclusion	95
II.3. ETUDE SYSTÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT DANS UN TUBE	96
II.3.1. Introduction	96
II.3.2. Modélisation à l'aide du modèle k-ε	96
II.3.3. Modélisation grâce à une viscosité turbulente constante	99
II.3.4. Conclusion	101
III. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT DE JET	101
III.1. INTRODUCTION	101
III.2. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	101
III.3. MODÉLISATION A L'AIDE DU MODELE k-ε	104
III.4. CONCLUSION	109
IV. LA CUVE CYLINDRIQUE AGITÉE PAR UN MOBILE AXIAL	109
IV.1. INTRODUCTION	109
IV.2. LES DIFFÉRENTES GÉOMÉTRIES DE CUVE ÉTUDIÉES	110
IV.3. RESULTATS NUMÉRIQUES OBTENUS POUR LES DIFFÉRENTES CUVES	111
IV.3.1. Introduction - Méthodes numériques	111
IV.3.2. Cuve 1	113
IV.3.3. Cuve 2	120
IV.3.4. Cuve 3	121
IV.4. CONCLUSION	121
V. ETUDE DU BASSIN DE 2800 m³	122
V.1. INTRODUCTION	122
V.2. ETUDE DE TROIS MODELES DE TURBULENCE	122
V.2.1. Introduction	122

V.2.2. <i>Présentation des résultats expérimentaux</i>	123
V.2.3. <i>Le modèle k-ε</i>	127
V.2.4. <i>Aspects informatiques relatifs au modèle k-ε</i>	129
V.2.5. <i>Viscosité turbulente constante sur l'ensemble du domaine</i>	129
V.2.6. <i>Modèle utilisant la relation de Nikuradse</i>	133
V.2.7. <i>Conclusion</i>	136
V.3. <i>ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE</i>	136
V.4. <i>ETUDE, A L'AIDE DU MODELE k-ε, DE L'ÉVOLUTION DU PROFIL DE VITESSE LOIN DES HÉLICES EN FONCTION DE LA VITESSE DE ROTATION DE CES DERNIERES</i>	137
V.5. <i>ETUDE DE L'INFLUENCE DU DIAMETRE DES HÉLICES ET DE LA VITESSE EN SORTIE D'HÉLICE</i>	139
V.6. <i>RÉPONSE A UNE VARIATION DE LA PROFONDEUR ET DE L'ÉCARTEMENTDES HÉLICES</i>	141
V.7. <i>RECHERCHE DE L'ORIENTATION OPTIMALE DES HÉLICES</i>	142
V.8. <i>ETUDE D'UNE CONFIGURATION OU LES HÉLICES SONT DIAMÉTRALEMENT OPPOSÉES</i>	144
V.9. <i>CONCLUSION</i>	145
VI. ETUDE DU BASSIN DE 860 m³	146
VI.1. <i>INTRODUCTION</i>	146
VI.2. <i>ESSAIS DE VALIDATION DE LA METHODE NUMÉRIQUE</i>	146
VI.3. <i>ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE CAS D'UNE SEULE HÉLICE</i>	148
VI.4. <i>RÉPONSE A UNE VARIATION DU DIAMETRE DE L'HÉLICE ET DE LA VITESSE EN SORTIE D'HÉLICE</i>	148
VI.5. <i>RÉPONSE A UNE VARIATION DE L'ORIENTATION DE L'HÉLICE</i>	150
VI.6. <i>CONCLUSION</i>	151
VII. ETUDE D'UN CHENAL OBLONG	151
VII.1. <i>INTRODUCTION</i>	151
VII.2. <i>VALIDATION DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE</i>	152
VII.3. <i>ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE</i>	156
VII.4. <i>ETUDE SYSTÉMATIQUE DES VITESSES MOYENNES DE CIRCULATIONS</i>	156
VII.5. <i>CONCLUSION</i>	157
VIII. CONCLUSION	158

Conclusion Générale

NOTATIONS

D	Diamètre du mobile d'agitation
T	Tenseur identité δ_{ij}
k	Energie cinétique turbulente
l_{eq}	Longueur droite équivalente
l_m	Longueur de mélange
l_u	Périmètre mouillé
ℓ	Echelle de longueur associée aux grosses structures
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carré sommable définies sur Ω
L^h	Espace des fonctions de carré sommable définies sur Ω de dimension J^h
N	Vitesse de rotation des hélices
N_p	Nombre de pompage
\tilde{P}^{qp}	Pression instantanée en un point
P	Pression en un point moyennée dans le temps
p	\tilde{P} -P
S_{ij}	$1/2(U_{ij} + U_{ji})$
T	Diamètre équivalent d'un chenal ou d'une cuve
\tilde{U}	Vitesse instantanée en un point
U	Vitesse du fluide en un point moyennée dans le temps
u	\tilde{U} -U
\bar{U}	Vitesse moyenne du fluide sur une section
\bar{U}_c	Vitesse moyenne de circulation
\bar{U}_j	Vitesse moyenne en sortie de jet
U_w^*	Vitesse de friction à la paroi : $(\tau_w/\rho)^{1/2}$
U^+	Expression adimensionnelle de la vitesse près d'une paroi : U/U_w^*
u	Echelle de vitesse associée aux grosses structures
V	Espace de Hilbert d'ordre 1 défini sur Ω
V_c	Espace de Hilbert d'ordre 1 défini sur Ω_c
V_c^h	Espace de Hilbert d'ordre 1 défini sur Ω_c de dimension I^h
V_c^h	Espace de Hilbert d'ordre 1 défini sur Ω_c de dimension I_c^h
y^+	Expression adimensionnelle de la distance à la paroi : U_w^*y/ν
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ϵ	Dissipation de l'énergie cinétique turbulente
μ	Viscosité dynamique
μ_{lam}	Viscosité dynamique laminaire
μ_t	Viscosité dynamique turbulente

ν	Viscosité cinématique : μ/ρ
ν_{lam}	Viscosité cinématique laminaire
ν_t	Viscosité cinématique turbulente
ρ	Masse volumique
σ	Contrainte normale
τ	Contrainte tangentielle
χ	Constante de von Karman: 0,41

INTRODUCTION GENERALE

Les procédés d'élimination des pollutions carbonée, azotée ou phosphorée par traitements biologiques sont constitués de bassins munis de système d'aération tels que des aérateurs de surface ou des systèmes de dispersion d'air par bulles en ascension libre.

Ce système doit assurer 2 fonctions :

- transférer l'O₂ nécessaire au développement des micro-organismes,
- homogénéiser et maintenir en suspension les solides constitués par les boues activées.

Ces systèmes présentent quelques inconvénients :

- bruit et aérosol pour les turbines de surfaces,
- dépôt des solides lors de l'arrêt de l'aération.

De plus, si on veut réaliser la dénitrification dans le même bassin, il faut créer une zone anoxie tout en maintenant une homogénéisation du bassin.

Il est apparu intéressant de concevoir les bassins d'aération en séparant les 2 actions aération et brassage :

- l'aération est assurée par des membranes ou poreux à fines bulles, disposés au fond du bassin.
 - le brassage est créé par des mobiles axiaux disposés verticalement ou horizontalement selon la géométrie de bassin,
- ce qui se traduit par un contrôle séparé de l'apport en oxygène et de l'homogénéisation du milieu.

Dans le cas où on utilise les chenaux d'oxydation existants, il suffit de positionner dans le bassin des mobiles d'agitation immergés à axes horizontaux et des systèmes de dispersion d'air.

Le travail que nous allons présenter porte sur l'étude des écoulements de fluide dans ces chenaux d'oxydation. Seul le cas d'un fonctionnement sans

aération a été envisagé. Des études précédentes ont montré qu'avec les diffuseurs en fonctionnement, disposés au fond du bassin, la circulation de l'eau était peu modifiée par la présence des bulles pour des vitesses superficielles (débit de gaz divisé par la surface du bassin) de quelques mètres par heure. L'étude que nous allons présenter se décompose en quatre chapitres dont le contenu est le suivant :

Le chapitre A étudie l'hydrodynamique des chenaux d'oxydation en se basant sur la notion d'approche globale. Deux méthodes d'évaluation de la vitesse moyenne d'écoulement sont décrites, l'une est basée sur l'écriture du bilan global de quantité de mouvement, l'autre consiste à appliquer au cas des chenaux d'oxydation les principes de l'agitation mécanique. Les relations issues de ces différentes approches ont été appliquées puis comparées à l'expérience dans le cas de trois chenaux d'oxydation de géométries différentes et de volumes respectifs 1, 860 et 2800 m³.

Le chapitre B décrit, dans sa première partie, le phénomène de turbulence ainsi que le formalisme qui lui est associé en mécanique des fluides. Le but de cette partie est de montrer quelle est la démarche suivie et les approximations réalisées afin d'obtenir le modèle k-ε. Dans une seconde partie nous décrirons les différentes techniques utilisées lors de la modélisation d'un écoulement turbulent : modèle à zéro, une ou deux équations. La troisième et dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'énoncé des conditions aux limites associées aux équations aux dérivées partielles dont nous venons de parler.

Le chapitre C expose la technique des éléments finis que nous avons utilisée lors de la résolution des équations aux dérivées partielles présentée au chapitre B. En fin de ce chapitre figurent les techniques utilisées pour stabiliser le processus itératif de résolution.

Le chapitre D contient l'ensemble des résultats numériques obtenus, à l'aide du logiciel de simulation FIDAP, suite à l'application des chapitres B et C à plusieurs types d'écoulement. Chacun des résultats de nos simulations est comparé aux valeurs expérimentales. Nous avons d'abord étudié l'écoulement dans un tube afin d'évaluer la validité des résultats de la simulation dans le cas d'un écoulement où la turbulence est générée par les parois. Ensuite nous

avons étudié les jets dans des milieux infini et confiné (cuve agitée). Ainsi, après avoir évalué le degré de fiabilité de notre technique sur ces trois cas fondamentaux nous avons étudié le cas des trois chenaux d'oxydation décrits au chapitre A. Cette étude constitue une généralisation de l'étude du jet dans un milieu confiné à un système de géométrie a priori quelconque dans lequel de l'eau est mise en mouvement par un ou plusieurs jets. Pour chacun de ces chenaux les résultats numériques ont été comparés aux valeurs expérimentales. Nous avons également étudié l'influence de différents paramètres tels que l'orientation, la hauteur, l'écartement ou le diamètre des mobiles d'agitation sur l'hydrodynamique du système.

Enfin, nous terminerons cette étude en donnant quelques suggestions pour la poursuite de ce travail.

CHAPITRE A

Approches empiriques

I. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de présenter et de tester deux méthodes semi-empiriques de calcul de la vitesse moyenne d'écoulement dans un chenal d'oxydation.

La première des deux méthodes que nous allons présenter consiste à calculer la vitesse d'écoulement en écrivant le bilan global de quantité de mouvement sur le chenal.

La deuxième méthode consiste à appliquer les concepts classiques de l'agitation mécanique au cas particulier que constitue le chenal d'oxydation.

Les deux premières parties de ce texte consisteront en une description de ces approches. Une fois ces méthodes de calcul exposées, nous confronterons leurs prédictions aux valeurs mesurées dans trois chenaux d'oxydation.

II. APPLICATION DU BILAN GLOBAL DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Au cours de ce paragraphe nous considérerons un bassin de géométrie a priori quelconque. L'approche que nous allons décrire consiste à écrire le bilan global de quantité de mouvement sur le bassin de la même façon que l'on applique le théorème de Bernoulli pour calculer la perte de charge dans un tube [SCHUTZ, 1984]. Pour écrire ce bilan, coupons mentalement le bassin sur et avant l'hélice comme nous l'avons représenté sur la figure 1. Nous avons ainsi défini un système physique auquel nous pouvons appliquer le théorème de conservation de la quantité de mouvement qui se traduit, en utilisant les notations définies sur la figure 2, par :

$$(1) \quad F_p + F_e = F_c + F_r$$

Dans l'équation ci-dessus le terme F_p représente le flux de quantité de mouvement introduite dans le système au travers de l'hélice. F_e est la quantité de mouvement introduite par le fluide ne traversant pas l'hélice (figure 2). F_c est la quantité de mouvement sortant du système au travers de

la section S_s définie sur les figures 1 et 2. F_r représente la somme des forces extérieures appliquées au système par frottement contre les parois.

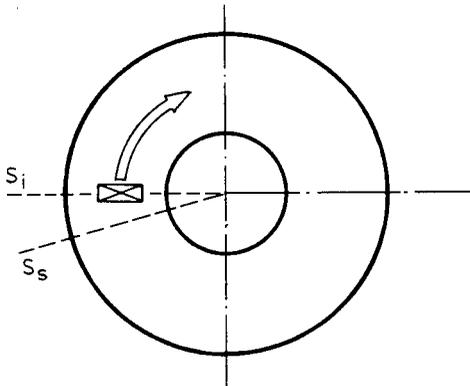


Figure 1. Définition du système sur lequel le bilan de la quantité de mouvement est écrit.

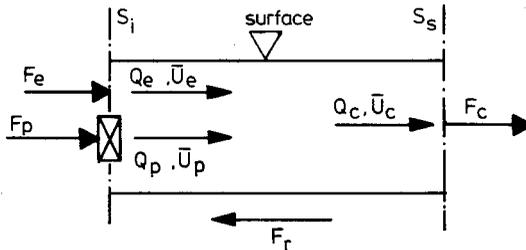


Figure 2. Représentation des notations utilisées pour l'écriture du bilan de la quantité de mouvement.

En supposant un profil uniforme, ces termes ont respectivement pour expression :

$$F_p = Q_p \rho \bar{U}_p = A_p \rho \bar{U}_p^2$$

$$F_e = Q_e \rho \bar{U}_e = A_e \rho \bar{U}_e^2$$

$$F_c = Q_c \rho \bar{U}_c = A_c \rho \bar{U}_c^2$$

$$F_r = \tau_w l_{u\text{eq}} = \frac{f}{4} \rho \bar{U}_{c\text{u}\text{eq}}^2 l_{u\text{eq}}$$

avec :

- Q = débit volumique
- A = surface
- \bar{U} = vitesse sur une section
- ρ = masse volumique
- τ_w = contrainte à la paroi
- l_u = périmètre mouillé
- l_{eq} = longueur droite équivalente
- f = facteur de Moody

L'expression du terme F_r est la même que celle employée lors du calcul de la perte de charge dans un tube. Elle permet de prendre en compte, grâce à l'introduction d'une longueur équivalente, l'influence de la géométrie du chenal sur la vitesse moyenne de circulation du fluide. Pour évaluer la longueur équivalente d'un chenal il est possible de le découper en plusieurs éléments dont on sait calculer la longueur équivalente. La somme des valeurs ainsi obtenues nous donne la longueur équivalente du chenal pris dans son ensemble. Les valeurs des longueurs équivalentes de sections élémentaires de bassin sont obtenues par application de lois empiriques. Diverses relations sont disponibles dans la littérature [PERRY, 1973].

Nous allons maintenant transformer l'équation (1) en utilisant les deux relations suivantes, provenant de simples bilans de conservation de débit et de surface.

$$A_p \bar{U}_p + A_e \bar{U}_e = A_c \bar{U}_c$$

$$A_p + A_e = A_c$$

L'équation de bilan peut alors se mettre sous la forme :

$$A_p \bar{U}_p^2 + A_e \left(\frac{A_c \bar{U}_c - A_p \bar{U}_p}{A_e} \right)^2 = A_c \bar{U}_c^2 + \frac{f}{4} \bar{U}_c^2 l_{u,eq}$$

Cette relation est en fait une équation du second degré en \bar{U}_c , vitesse moyenne de circulation. Sa résolution donne :

$$\tilde{U}_c = Q_p \frac{A_c}{A_e} \frac{\sqrt{1 + \left(A_c - \frac{A_c^2}{A_e} + \frac{f}{4} l_u l_{eq} \right) \frac{A_e^2}{A_c^2} \left(\frac{1}{A_p} + \frac{1}{A_e} \right)}}{A_c - \frac{A_c^2}{A_e} + \frac{f}{4} l_u l_{eq}} - 1$$

Soit encore :

$$\tilde{U}_c = Q_p \frac{A_c}{A_e} \frac{\sqrt{\frac{f}{4} l_u l_{eq} \frac{A_e}{A_c A_p} - 1}}{\frac{f}{4} l_u l_{eq} - \frac{A_c A_p}{A_e}}$$

En posant :

$$\alpha = \frac{f}{4} l_u l_{eq} \frac{A_e}{A_c A_p}$$

On obtient finalement :

$$\tilde{U}_c = \frac{Q_p}{A_p} \frac{1}{\sqrt{\alpha} + 1}$$

Il est possible de remplacer, dans cette formule, le débit Q_p par son expression en fonction de la vitesse de rotation de l'hélice : $Q_p = N_{qp} ND^3$, où N_{qp} est le nombre de pompage du mobile. Une telle opération nous permet d'obtenir la relation :

$$\tilde{U}_c = \frac{Q_p}{A_p} \frac{1}{\sqrt{\alpha} + 1} = \frac{N_{qp} D^3}{A_p (\sqrt{\alpha} + 1)} N$$

Soit encore :

$$\tilde{U}_c = \phi_2 N$$

avec :

$$\phi_2 = \frac{N_{qp} D^3}{A_p (\sqrt{\alpha} + 1)}$$

Dans cette relation l'hélice est caractérisée par son nombre de pompage et par son diamètre.

Remarque : Cette méthode d'estimation de la vitesse moyenne de circulation comporte une imprécision dans l'évaluation de la longueur droite équivalente du chenal. Plusieurs abaques disponibles dans la littérature ne donnent pas toujours des résultats rigoureusement identiques. Pour réaliser notre étude nous avons choisi des abaques aussi classiques que possible [PERRY, 1973].

Remarque : Dans le cas de chenaux munis de deux hélices, l'approche décrite ci-dessus peut indifféremment être réalisée en considérant deux moitiés de bassin munies chacune d'une hélice ou une seule section de bassin possédant deux hélices. Dans ces deux cas les formules utilisées sont les mêmes et les résultats sont équivalents (seuls les résultats intermédiaires de calculs diffèrent).

III. APPROCHE DE TYPE AGITATION

Elle consiste à utiliser les résultats obtenus sur des cuves de géométrie standard à des systèmes "cuve-agitateur" de géométrie non standard.

L'étude de Raschid-Sally [RASCHID-SALLY, 1984] a montré que dans des chenaux d'oxydation de géométrie semblable à ceux étudiés ici, il était possible d'écrire la relation :

$$\bar{U}_c = \bar{U}_p \frac{D}{T}$$

Notons que dans cette relation où T représente le diamètre équivalent du chenal, nous avons fixé la valeur du rapport Q_c/Q_p (par l'intermédiaire du rapport \bar{U}_c/\bar{U}_p).

De très nombreux essais d'origines diverses ont montré que, pour les systèmes "cuve-agitateur" standard fonctionnant en régime turbulent, les nombres de circulation (Q_c/ND^3) et de pompage ($N_{gp} = Q_p/ND^3$) peuvent être considérés comme constants. Il a été montré [MEZIANE, 1988] que ces grandeurs étaient également constantes dans le cas de cuves de géométries non standard et notamment pour les chenaux d'oxydation qui nous intéressent ici. Nous pouvons donc considérer la relation ci-dessous comme valable dans notre cas.

$$Q_p = N_{qp} N D^3$$

Si l'on ajoute aux deux relations ci-dessus la relation :

$$\bar{U}_p = \frac{Q_p}{S_p}$$

nous pouvons écrire :

$$\bar{U}_c = \frac{4 N_{qp}}{\pi} N \frac{D^2}{T}$$

soit encore :

$$\bar{U}_c = \phi_3 N$$

avec :

$$\phi_3 = \frac{4 N_{qp}}{\pi} \frac{D^2}{T}$$

Cette relation nous permet de calculer la vitesse de circulation à l'intérieur d'un chenal. Notons que :

- La géométrie d'une section droite de chenal est prise en compte dans cette formule par l'intermédiaire de T qui en représente le diamètre équivalent. Nous avons pris ici comme définition du diamètre équivalent, le diamètre du cercle de même surface que la section droite du chenal considéré. Le choix d'une autre définition peut donner des résultats sensiblement différents, ce manque d'universalité limite l'intérêt de la méthode que nous venons de présenter.
- La différence de comportement entre un chenal annulaire et oblong, ainsi que l'influence de la valeur du rayon intérieur du bassin annulaire ne sont pas prises en compte dans cette formulation. Cette faiblesse a peu d'importance dans la mesure où, si l'on considère des géométries physiquement réalistes, les longueurs droites équivalentes sont toujours comparables.
- Comme l'approche précédente qui consistait à écrire le bilan global de quantité de mouvement, les relations énoncées ci-dessus peuvent, dans le cas de chenaux munis de deux hélices, être appliquées en considérant

deux moitiés de bassin munies chacune d'une hélice, ou une seule section de bassin possédant deux hélices. Les résultats obtenus sont équivalents.

IV. ENONCE DES RESULTATS

IV.1. INTRODUCTION

Des résultats expérimentaux ont été obtenus sur trois chenaux d'oxydation de taille et de géométrie très différentes. Pour chacun de ces chenaux, après avoir exposé les résultats expérimentaux, nous calculerons la vitesse moyenne d'écoulement suivant les deux méthodes exposées plus haut. Ces résultats seront comparés entre eux dans le prochain paragraphe.

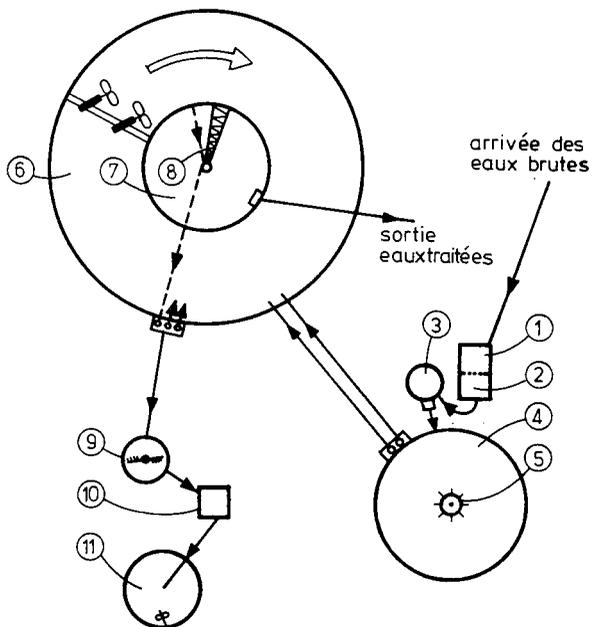
IV.2. CAS DU BASSIN DE 2800 m³

IV.2.1. Description du bassin

Le bassin que nous étudions ici se trouve dans la station d'épuration de la coopérative laitière Alsace-lait située à Hoerdt près de Strasbourg [BERTRAND, 1987]. Cette station traite exclusivement les eaux usées provenant de la laiterie et représente une capacité de 20 000 équivalent habitant. L'ensemble des ouvrages qui la constituent est décrit sur les figures 3 et 7.

L'eau est mise en mouvement à l'aide de deux agitateurs immergés TMI (Technique du Mélange Industriel) de type 3-I-75-1300 (figure 4). Ces appareils ont les caractéristiques nominales suivantes :

- * moteur Guinard 7,5 kW
- * vitesse du moteur 1500 tours par minute
- * vitesse de rotation de l'agitateur 75 tours par minute
- * trois pales
- * diamètre 1,30 m
- * nombre de pompage $N_{qp} = 0,84$
- * nombre de puissance $N_p = 0,94$
- * débit de pompage $Q_p = 2.31 \text{ m}^3/\text{s}$



1. local de commande
2. relevage des eaux usées et dégrilleur
3. dessableur-dégraisseur aéré combiné
4. bassin tampon de 700 m³
5. turbine flottante
6. chenal d'oxydation de 2800 m³
7. clarificateur de 220 m³
8. pont racleur
9. silo épaisseur de 60 m³
10. local de déshydratation
11. silo de stockage des boues de 450 m³

Figure 3. Schéma de la station d'épuration de l'usine d'Alsace-Lait à Hoerdt.

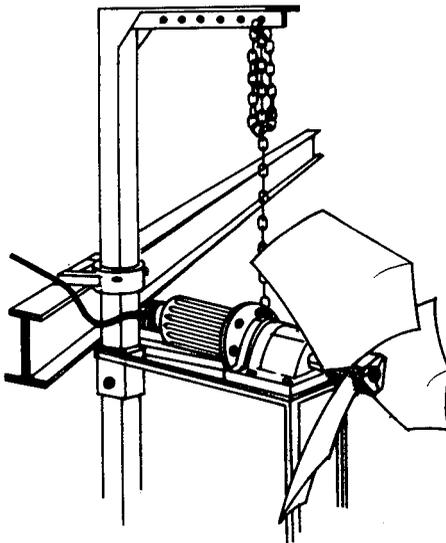


Figure 4. Agitateur TMI 3-I-75-1300.

Les agitateurs, positionnés sur une même section comme indiqué sur la figure 3, sont descendus au fond du chenal. Les potences supportant et guidant les agitateurs sont fixées sur une poutre qui repose sur les parois du chenal et sont emboîtées dans des plaques scellées au fond du bassin (figure 4). Les potences sont orientées de manière à ce que les axes des agitateurs soient parallèles entre eux et que celui de l'agitateur intérieur soit rasant par rapport au bord intérieur du chenal.

IV.2.2. Résultats expérimentaux [BERTRAND, 1987]

Les vitesses d'écoulement ont été mesurées à l'aide d'un micromoulinet perpendiculairement au rayon, ce qui ne correspond pas nécessairement à la direction réelle d'écoulement (l'écart pouvant atteindre un angle de 20° environ). Sur chaque section, les vitesses ont été mesurées en quarante points répartis comme indiqué sur la figure 5. Chaque mesure de vitesse en un point correspond à la moyenne de 3 à 6 mesures consécutives selon la dispersion des résultats enregistrés, ceci afin d'obtenir une valeur moyenne représentative. Les vitesses d'écoulement sont données avec une précision moyenne de $\pm 0,015$ m/s, soit 6 %. Tous les résultats ont été reportés sur les figures 51

à 55 pages 124 à 126 et 59 à 61 pages 137 et 138). La vitesse moyenne d'écoulement sur une section \bar{U}_c correspond à la moyenne des quarante mesures (les calculs intégrant les surfaces délimitées par les courbes iso-vitesses n'ont pas donné de précision significative supplémentaire).

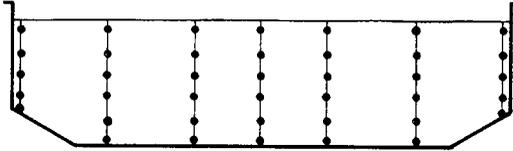


Figure 5. Répartition sur une section droite des points de mesure de la vitesse.

La vitesse moyenne d'écoulement, \bar{U}_c , a été mesurée pour des vitesses de rotation du mobile de 22,5 ; 37,5 ; 56 et 75 tours par minute correspondant respectivement à des vitesses en sortie de jet de 0,52 ; 0,87 ; 1,3 et 1,74 m/s.

Les résultats obtenus à la suite de ces mesures (figure 6) montrent que \bar{U}_c et N sont liés par la relation :

$$\begin{aligned} \bar{U}_c &= \phi_1 N \\ \phi_1 &= 0,45 \text{ m} \end{aligned}$$

La valeur de ϕ_1 donnée ici est valable pour \bar{U}_c exprimé en mètres par seconde et N en tours par seconde.

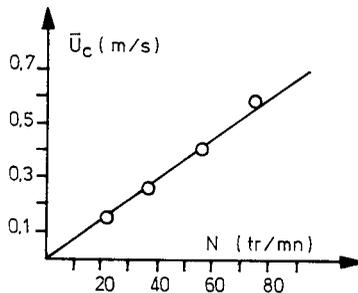


Figure 6. Vitesse de circulation en fonction de la vitesse de rotation des hélices pour le chenal de 2800 m³.

IV.2.3. Application du bilan global de quantité de mouvement

Nous allons dans un premier temps évaluer la valeur de α nécessaire à modéliser le fonctionnement de notre chenal puis nous calculerons la valeur du coefficient ϕ_2 que nous avons défini lors de la description théorique associée à l'approche envisagée ici.

L'évaluation du coefficient α nécessite la connaissance de la longueur droite équivalente du chenal, du périmètre mouillé et du facteur de Moody. Evaluons donc successivement chacun de ces paramètres.

La figure 7 nous indique que le périmètre mouillé vaut ici 16 m. Le calcul de la longueur droite équivalente du chenal sera ramené à celui d'un coude à angle droit de même géométrie auquel correspond une longueur droite équivalente de 165 m [PERRY, 1973]. En multipliant cette valeur par 4 nous obtenons $l_{eq} = 660$ m. En supposant un écoulement turbulent, le nombre de Reynolds est supérieur à 10^6 , et des parois rugueuses (elles sont composées de béton $\epsilon/d = 0,00004$) nous obtenons un facteur de Moody, f , égal à : 0,006.

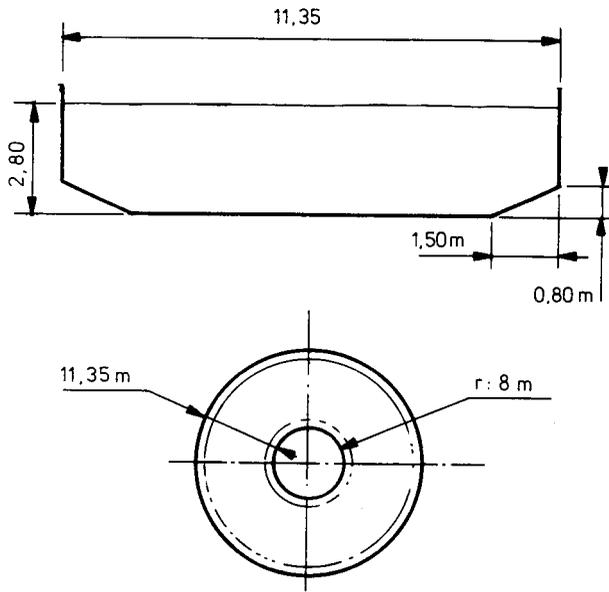


Figure 7. Dimensions du chenal de 2800 m^3 .

La valeur de α ainsi obtenue est :

$$\alpha = \frac{0,006}{4} 16 \frac{28}{30,6} \frac{2,7}{2,7} 660 = 5,36$$

Compte tenu des caractéristiques du mobile d'agitation données au paragraphe A.IV.2.1, la vitesse moyenne de circulation est donnée par la relation :

$$\dot{U}_c = \frac{Q_p}{A_p} \frac{1}{\sqrt{\alpha} + 1} = \frac{2 N_{qp} D^3}{A_p (\sqrt{\alpha} + 1)} N = \phi_2 N$$

$$\phi_2 = 0,42 \text{ m}$$

L'apparition du facteur 2 dans l'expression de ϕ_2 est due au fait qu'ici Q_p est égal au double du débit engendré par une des deux hélices (paragraphe A.II).

IV.2.4. Approche de type agitation

Nous avons vu au paragraphe A.III comment, pour un couple bassin agitateur donné, la vitesse moyenne de circulation pouvait se mettre sous la forme :

$$\dot{U}_c = \frac{4 N_{qp} D^2}{\pi T} N = \phi_3 N$$

avec :

$$T = \sqrt{2,80 \frac{11,35}{2} \frac{4}{\pi}} = 4,5 \text{ m}$$

soit :

$$\phi_3 = 0,40 \text{ m}$$

T est ici le diamètre du cercle qui a une surface deux fois plus petite que la surface d'une section droite de chenal. En effet une seule hélice est ici prise en compte dans nos calculs (paragraphe A.III).

Notons que la valeur du paramètre ϕ_3 est liée à la définition du diamètre équivalent T. Ainsi, si l'on définit T comme suit,

$$T = \frac{4 * \text{Surface mouillée}}{\text{Périmètre mouillé}}$$

nous obtenons un coefficient ϕ_3 de 0,48 ce qui est assez différent de la valeur citée ci-dessus. Dans tous les cas la valeur du coefficient ϕ_3 obtenue est du même ordre de grandeur que la valeur expérimentale, 0,45.

IV.3. CAS DU BASSIN DE 860 m³

IV.3.1. Description du bassin

Les mesures ont été effectuées à la station d'épuration de Mortagne. La figure 8 décrit la géométrie et les dimensions du bassin.

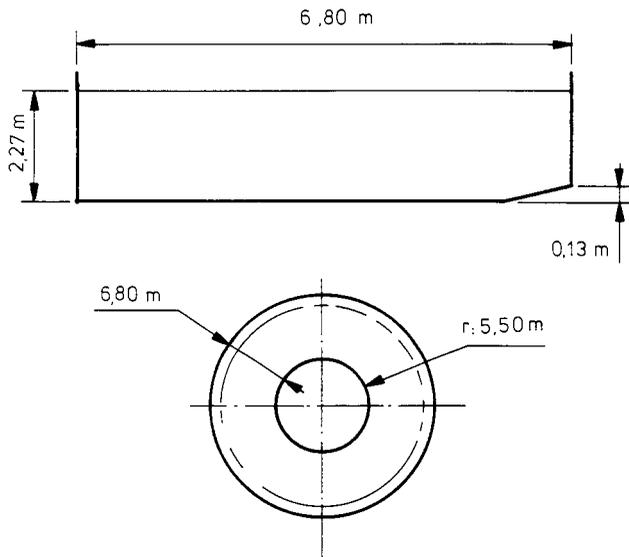


Figure 8. Dimensions du chenal de 860 m³.

L'eau est mise en mouvement à l'aide de deux agitateurs immergés TMI (Technique du Mélange Industriel) de type 3-I-75-1300 décrits au paragraphe

IV.3.2. Résultats expérimentaux

La vitesse moyenne de circulation, \bar{U}_c , a été mesurée pour des vitesses de rotation du mobile de 35 ; 52 ; 61 et 74 tours par minute correspondant respectivement à des vitesses en sortie de jet de 0,81 ; 1,21 ; 1,42 et 1,72 m/s.

Les résultats obtenus à la suite de ces mesures (figure 9) montrent que \bar{U}_c et N sont liés par la relation :

$$\bar{U}_c = \phi_1 N$$

$$\phi_1 = 0,50 \text{ m}$$

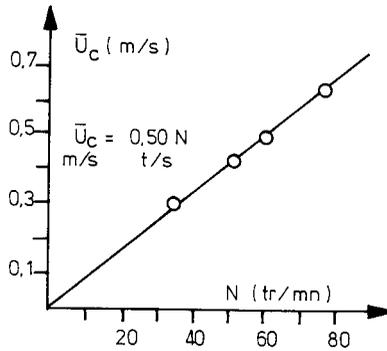


Figure 9. Vitesse de circulation en fonction de la vitesse de rotation des hélices pour le chenal de 860 m³.

IV.3.3. Application du bilan global de quantité de mouvement

Nous allons maintenant appliquer les formules obtenues au paragraphe A.II en supposant un écoulement pleinement turbulent et des parois en béton.

En adoptant la même méthode de calcul que dans le cas du bassin de 2800 m³ décrit plus haut, nous obtenons une longueur droite équivalente de 280 m. Le nombre de Reynolds lié à l'écoulement étant supérieur à 10⁶ nous prendrons un facteur de Moody, f , égal à 0,007.

La valeur de α ainsi obtenue est :

$$\alpha = \frac{0,007}{4} 11,34 \frac{12,7}{15,4} 2,7 280 = 1,70$$

Comme pour le bassin de 2800 m³ décrit plus haut, la vitesse moyenne de circulation est donnée par la formule :

$$\bar{U}_c = \frac{Q_p}{A_p} \frac{1}{\sqrt{\alpha} + 1} = \frac{2 N_{qP} D^3}{A_p (\sqrt{\alpha} + 1)} N = \phi_2 N$$

$$\phi_2 = 0,60 \text{ m}$$

IV.3.4. Approche de type agitation

Nous avons vu au paragraphe A.III comment, pour un couple bassin agitateur donné, la vitesse moyenne de circulation pouvait se mettre sous la forme :

$$\bar{U}_c = \frac{4 N_{qP} D^2}{\pi T} N = \phi_3 N$$

avec :

$$T = \sqrt{2,27 \frac{6,8}{2} \frac{4}{\pi}} = 3,14 \text{ m}$$

soit :

$$\phi_3 = 0,58 \text{ m}$$

IV.4. CAS DU BASSIN DE 1 m³

IV.4.1. Description du bassin

L'étude expérimentale a été réalisée sur un bassin de volume approximativement égal à 1 m³ dont la géométrie est représentée schématiquement sur la figure 10.

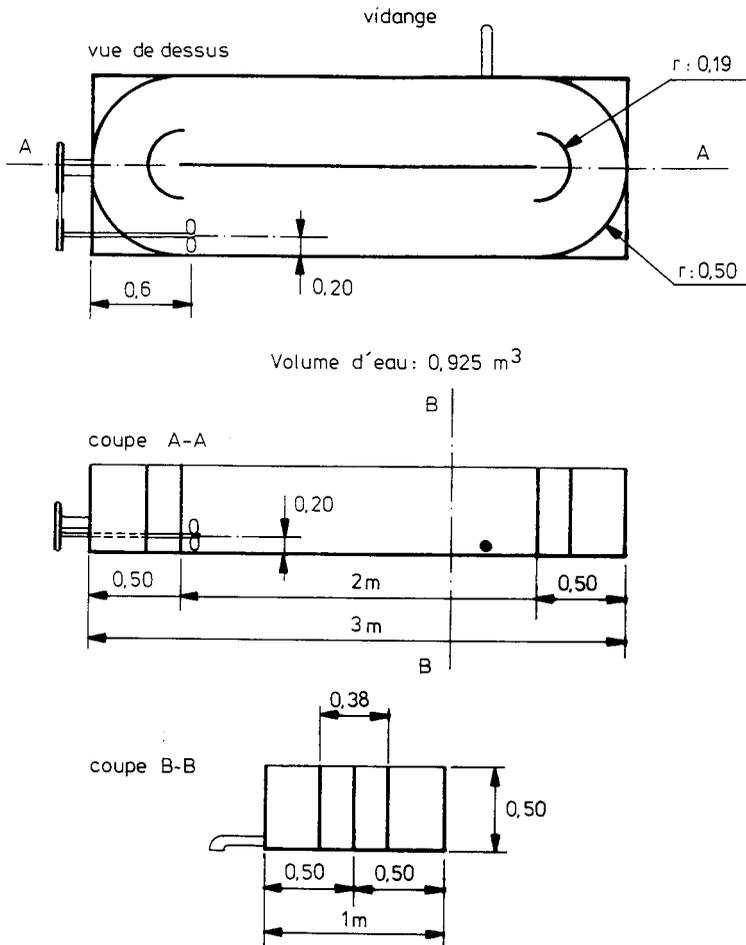
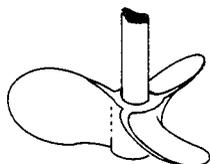
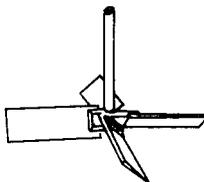


Figure 10. Dimensions du chenal de 1 m³.

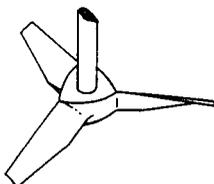
Construit en P.V.C, ce chenal consiste en un bassin de 3 m de long, 1 m de large et 0,5 m de profondeur. Les arrondis aux deux extrémités du bassin ainsi qu'une cloison centrale de 2 m lui donnent l'aspect d'un "chenal d'oxydation". Placés aux deux extrémités de la paroi centrale deux guides d'eau de forme hémicylindrique (diamètre 0,38 m) permettent de canaliser l'eau et de lui donner un parcours bien défini de longueur moyenne 5,6 m. Sur ce bassin, qui est disponible dans notre laboratoire, plusieurs types ainsi que plusieurs diamètres d'hélice ont été testés (figure 11).



a. Hélice marine



b. Turbine à pales inclinées



c. Hélice A310

Figure 11. Les différents mobiles d'agitation utilisés.

Le tableau 1 donne la liste et les caractéristiques de ces mobiles d'agitation.

Type de mobile	Hélice marine	Hélice A310	TPI 45°
Nbre de pales	3	3	4
Fabricant	Lumpp	Lightnin	Lightnin
D	0,15	0,15 0,20	0,10 0,15 0,20
N_{qP}	0,55	0,68 0,66	0,70 0,75 0,70
N_P	0,34	0,35 0,36	1,20 1,30 1,40

Tableau 1. Caractéristiques des mobiles d'agitation

IV.4.2 Résultats expérimentaux [MEZIANE, 1988]

Pour chacun des mobiles décrits dans le tableau 1 les vitesses de circulation ont été mesurées en fonction de la vitesse de rotation. Les résultats obtenus montrent que la vitesse de circulation \hat{U}_c peut être reliée à la vitesse de rotation du mobile par la relation $\hat{U}_c = \phi_1 N$. Le tableau 2 donne les valeurs du coefficient ϕ_1 .

Diamètre (m)	Type de mobile		
	Hélice marine	Hélice A310	TPI 45°
0,10	0,027	0,040	0,014
0,15			0,036
0,20			0,075

Tableau 2. Valeurs du coefficient ϕ_1 (m).

IV.4.3. Ecriture du bilan global de quantité de mouvement

Nous allons maintenant appliquer les formules obtenues au chapitre A.II en supposant un écoulement turbulent et des parois lisses (elles sont composées de P.V.C).

L'application d'abaques classiques [PERRY, 1973] nous montre que la longueur droite équivalente d'un coude tel que le notre est de 15 mètres. La valeur de la longueur droite équivalente au chenal doit donc être de 36 mètres.

Un simple relevé des cotes du bassin nous indique que le périmètre mouillé est de 1,3 m pour une section droite de bassin de 0,2 m².

D'autre part la vitesse moyenne du fluide dans ce bassin est comprise entre 0,1 m/s et 0,5 m/s, ce qui correspond à une valeur du nombre de Reynolds supérieure à 10⁴, nous pouvons dire que le facteur de friction est à peu près égal à 0,009.

Les valeurs de α obtenues à la suite de l'application des valeurs numériques citées ci-dessus sont données par le tableau suivant :

Diamètre (m)	Type de mobile		
	Hélice marine	Hélice A310	TPI 45°
0,10			13,84
0,15	5,81	5,81	5,81
0,20		3,00	3,00

A partir des valeurs de α données ci-dessus calculons les valeurs du paramètre ϕ_2 qui lie la vitesse moyenne de circulation de l'eau à la vitesse de rotation de l'hélice.

Diamètre (m)	Type de mobile		
	Hélice marine	Hélice A310	TPI 45°
0,10			0,019
0,15	0,031	0,038	0,042
0,20		0,061	0,065

Tableau 3. Valeurs du coefficient ϕ_2 (m).

IV.4.4 Approche de type agitation

Nous avons vu au paragraphe A.III comment, pour un couple bassin-agitateur donné, la vitesse moyenne de circulation pouvait se mettre sous la forme :

$$\bar{U}_c = \frac{4 N}{\pi} \frac{D^2}{T} N = \phi_3 N$$

Voici un tableau donnant les valeurs de la constante ϕ_3 .

Diamètre (m)	Type de mobile		
	Hélice marine	Hélice A 310	TPI 45°
0,10			0,018
0,15	0,032	0,040	0,044
0,20		0,062	0,073

Tableau 4. Valeurs du coefficient ϕ_3 (m).

V. SYNTHÈSE - CONCLUSION

Dans les paragraphes précédents nous avons exprimé la vitesse moyenne de circulation dans chaque chenal étudié comme une grandeur proportionnelle à la vitesse de rotation de l'hélice. Nous avons ainsi fait apparaître trois constantes : ϕ_1 associée aux résultats expérimentaux, ϕ_2 associée à l'application du bilan global de quantité de mouvement et ϕ_3 associée à l'approche de type agitation. L'écart entre la constante expérimentale ϕ_1 et les valeurs du paramètre ϕ_2 ou ϕ_3 obtenu en appliquant telle ou telle approche théorique nous donne une estimation de la validité des méthodes de prédiction présentées dans ce chapitre. Les valeurs de ces paramètres sont résumées dans le tableau 5. L'étude de ce tableau montre un bon accord entre les valeurs estimées et mesurées sauf dans le cas du chenal de 860 m³. Les écarts qui apparaissent dans ce cas sont certainement dus à la trop grande proximité de la surface des systèmes d'agitation qui se traduit par l'existence de vortex à

l'origine de pertes d'énergie qui ne sont pas prises en compte dans nos approches théoriques.

En conclusion de ce chapitre nous pouvons dire que, pour un écoulement ne présentant pas de source particulière de perte d'énergie (vortex ou autre), la vitesse moyenne de circulation peut être estimée en appliquant l'une ou l'autre des approches décrites au début de ce chapitre.

		$D_{(m)}$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
$1m^3$	Hélice marine	0,15	0,027	0,031	0,032
	Hélice A310	0,15	0,040	0,038	0,040
		0,20	0,054	0,061	0,062
	TPI 45°	0,10	0,014	0,019	0,018
		0,15	0,036	0,042	0,044
		0,20	0,075	0,065	0,073
$860m^3$	TMI	1,30	0,50	0,60	0,58
$2800m^3$	TMI	1,30	0,45	0,42	0,40

Tableau 5. Résumé des résultats obtenus dans le chapitre A
 ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 sont donnés en mètre.

CHAPITRE B

Etude théorique de la turbulence

I. INTRODUCTION

GÉNÉRALITÉS

La prédiction des écoulements turbulents nécessite actuellement de coûteuses études sur pilote. Les modèles permettant d'éviter ces études sont très demandés.

Dans le passé les modèles empiriques ne faisaient pas appel aux équations de Navier-Stokes. Aujourd'hui les capacités des ordinateurs sont telles que l'on peut aborder le problème par l'intermédiaire de ces équations. Leur résolution directe n'est pas envisagée actuellement car elle est trop difficile dans le cadre industriel.

La tendance des modèles de turbulence est d'utiliser des équations dérivées de celles de Navier-Stokes. Elles ont pour inconnues les vitesses moyennes et certaines grandeurs caractéristiques de la turbulence. Ces grandeurs inconnues sont modélisées par des relations empiriques ou par des équations de transport. Ces deux types de relations constituent les modèles de turbulence.

Certains modèles de turbulence très complexes peuvent représenter une large gamme d'écoulements. Leur résolution, délicate, demande de gros temps de calcul. Dans un cas précis, un modèle plus simple mais moins général peut représenter l'écoulement aussi bien, sinon mieux. Pour le choisir il faut que l'opérateur ait les bases théoriques nécessaires pour appréhender le phénomène physique en question. Il lui faut en outre connaître les conditions d'application et le degré de complexité d'un nombre suffisant de modèles.

C'est pourquoi dans le paragraphe II nous nous attacherons à décrire la physique du phénomène de turbulence et à donner les résultats marquants de la théorie qui lui est associée. Ceci nous permettra notamment de comprendre l'origine et les limites du modèle $k-\epsilon$. Dans le paragraphe III nous décrirons quelques modèles de turbulence afin de mieux comprendre dans quelle famille se trouvent les modèles que nous testerons ultérieurement.

CHRONOLOGIE

1925 : Prandtl propose le modèle de la longueur de mélange.

1940 : Introduction des équations de transport des grandeurs caractéristiques de la turbulence.

1960 : Premières applications sur ordinateurs.

II. ETUDE THÉORIQUE

II.1 ECRITURE DES ÉQUATIONS

En utilisant des notations classiques des mathématiques [PIRONNEAU, 1988] les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U} + p \vec{I} - \vec{\tau}) = \rho \vec{f}_e$$

Cette formulation permet de bien mettre en valeur chacun des termes pris en compte lors du bilan de quantité de mouvement dont sont issues ces équations. Nous voyons ainsi aisément l'effet de la convection grâce au terme $\rho \vec{U} \otimes \vec{U}$, l'effet des forces de pressions, $p \vec{I}$, l'influence de la viscosité, $-\vec{\tau}$ et celle de forces volumiques telles que la pesanteur, $\rho \vec{f}_e$.

Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons une notation moins formelle qui permet, en utilisant la sommation d'Einstein, de mieux mettre en valeur les quantités scalaires entrant dans ces équations. Les équations de Navier-Stokes seront donc réécrites sous la forme :

$$\frac{\partial \rho \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho \tilde{U}_k \tilde{U}_i = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu (\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_i})) \quad i=1,2,3$$

L'étude que nous présentons ici étant destinée à simuler le fonctionnement hydraulique de chenaux d'oxydation contenant de l'eau, nous nous intéresserons seulement au cas des fluides incompressibles. L'équation de conservation de matière que nous utiliserons par la suite peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0$$

Les champs de vitesse (\tilde{U}_i) et de pression (\tilde{P}) figurant dans les équations ci-dessus sont liés à des valeurs instantanées. En régime turbulent, bien que ce système admette une solution, sa résolution pose des problèmes pratiques insurmontables, vu la vitesse à laquelle fluctuent les grandeurs qui y interviennent. Il est donc couramment admis de transformer ces équations afin de faire apparaître comme inconnues les champs de vitesse (U_i) et de pression (P) moyennés sur une petite échelle de temps [RODI, 1980].

$$\tilde{U}_i = U_i + u_i \text{ et } \tilde{P} = P + p$$

Ceci permet d'écrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme:

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j}$$

Il apparait alors une nouvelle inconnue, $\overline{u_i u_j}$, appelée tenseur de Reynolds, dont nous donnons ici l'équation de transport notée (2).

$$(2) \quad \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = C_{ij} + \Phi_{ij} + d_{ij} - \epsilon_{ij}$$

où :

$$C_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \qquad \Phi_{ij} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$d_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \delta_{jk} \right) \cdot \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \qquad \epsilon_{ij} = 2 \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

où : \tilde{U} est la valeur instantanée de la vitesse

U est la valeur moyenne de la vitesse

u est la valeur fluctuante de la vitesse

C est le terme de production du au gradient de vitesse moyenne,

Φ est le terme dit de corrélation pression-vitesse. Il est à l'origine de la redistribution de la turbulence entre les directions de l'espace,

d représente la redistribution de la turbulence de nature diffusive, entre deux points de l'espace,

ε est le terme de destruction.

\bar{x} est la valeur moyennée dans le temps de la grandeur x en considérant une petite échelle de temps de sorte que $x - \bar{x}$ représente la partie fluctuante de x

La modélisation d'un écoulement en régime turbulent nécessite l'évaluation du tenseur de Reynolds, or l'équation de transport (2) donnée ci-dessus, outre sa complexité, fait apparaître de nouvelles inconnues. Nous sommes donc amenés, à partir de considérations physiques, à simplifier (2), afin que cette équation puisse nous donner le champ du tenseur de Reynolds, dont nous déduirons les champs de vitesse et de pression moyennes à l'aide de l'équation (1 bis).

Dans les paragraphes suivants nous modéliserons un à un chacun des termes de l'équation de transport donnée (2).

II.2. LA TURBULENCE VUE SOUS SON ASPECT SPECTRAL

Avant de commencer à modéliser les termes de l'équation de transport du tenseur de Reynolds, nous allons nous intéresser à l'aspect spectral de la turbulence afin de mieux comprendre la physique du phénomène étudié [CLER, 1982].

II.2.1. Description des structures turbulentes

Les visualisations des écoulements turbulents mettent en évidence l'existence de toute une gamme de tourbillons dont les dimensions couvrent un large spectre allant de grosses structures ordonnées et cohérentes à de petites structures aux propriétés statistiquement isotropes.

La taille et l'orientation des grosses structures sont fixées par l'écoulement moyen. Ainsi, dans le cas d'une couche limite, leur taille est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche. Pour la turbulence de grille c'est la maille de la grille qui fixe la dimension des gros tourbillons.

Les petites structures sont issues de la destruction des gros tourbillons. A chaque destruction, de nouvelles structures se créent, dont les

axes de rotation sont quelconques. La répartition des axes de rotation des plus petites structures est donc isotrope.

11.2.2. Ecriture d'une équation spectrale simplifiée

Les structures décrites ci-dessus peuvent être mises en évidence à l'aide de la corrélation spatiale $\overline{u_i(x,t)u_j(x+r,t)}$, que nous noterons $\overline{u_i u_j}$.

Soit $\psi_{ij}(k,t)$ le tenseur obtenu par transformation de Fourier des corrélations $\overline{u_i u_j}$ prises en deux points de l'espace :

$$\psi_{ij}(k,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u_i u_j} e^{-i k r} dr$$

Le tenseur de Reynolds, $\overline{u_i u_j}$, et l'énergie cinétique turbulente k ($k=1/2\overline{u_i u_i}$) peuvent être calculés à partir de ψ_{ij} grâce aux intégrales suivantes :

$$\overline{u_i u_j} = \int_0^{\infty} \psi_{ij}(k,t) d k$$

$$k = 1/2 \int_0^{\infty} \psi_{ii}(k,t) d k$$

Nous pouvons donc définir une densité d'énergie $E(k,t)$ par :

$$E(k,t) = 1/2 \psi_{ii}(k,t)$$

La représentation graphique $E(k)$ est le spectre d'énergie dont l'allure est donnée sur la figure 12 :

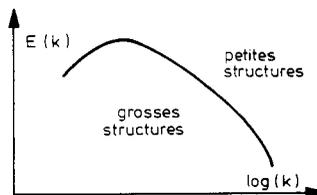


Figure 12. Spectre d'énergie dans un écoulement pleinement turbulent.

A partir de l'équation de transport du tenseur de Reynolds, il est possible d'obtenir l'équation de transport de E énoncée ci-dessous :

$$(3) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \mathcal{P}(\kappa, t) + T(\kappa, t) - 2\nu\kappa^2 E(\kappa, t)$$

Où :

$\partial E / \partial t$ est le terme de variation temporelle,

$\mathcal{P}(\kappa, t)$ est le terme de production dû au gradient moyen de vitesse,

$T(\kappa, t)$ représente le transfert spectral,

$-2\nu\kappa^2 E(\kappa, t)$ représente la dissipation visqueuse.

Remarquons que production, convection et dissipation sont des phénomènes que nous avons rencontrés dans l'espace physique lors de l'étude de l'équation de transport du tenseur de Reynolds. En revanche le mécanisme de transfert spectral n'apparaît pas dans les équations lorsqu'on travaille dans l'espace physique car l'intégrale $\int_0^\infty T(\kappa, t) d\kappa$ y est nulle.

II.2.3. Le phénomène de cascade d'énergie

Dans ce paragraphe nous allons utiliser l'équation de transport (3) pour montrer l'existence et décrire un phénomène important connu sous le nom de cascade d'énergie.

La présence de κ^2 dans le terme visqueux $-2\nu\kappa^2 E(\kappa, t)$ montre que cette dissipation est particulièrement importante pour les grands nombres d'ondes, c'est-à-dire pour les petites structures turbulentes. C'est donc principalement au niveau de ces dernières que s'opère la transformation d'énergie cinétique en chaleur. Notons que, comme la taille des structures turbulentes les plus petites est encore considérablement supérieure au libre parcours moyen des molécules, le phénomène de turbulence est complètement distinct du phénomène de chaleur.

Les grosses structures (associées aux faibles valeurs de κ) ont des directions préférentielles de rotation qui rendent le tenseur ψ_{ij} fortement anisotrope. En revanche les petits tourbillons perdent cette orientation et donnent lieu à un tenseur ψ_{ij} très proche du tenseur isotrope $1/3 \psi_{ii} \delta_{ij}$. L'équation de continuité montre que, dans ce cas le terme \mathcal{P} est alors négligeable.

L'énergie de turbulence est donc produite au niveau des grosses structures et détruite dans les petites structures par dissipation visqueuse. Il existe donc un transfert d'énergie des grosses structures vers les petites. Ce transport est représenté par le terme T de l'équation (3).

Nous pouvons dire que, pour des nombres de Reynolds relativement élevés (tel que le phénomène de cascade d'énergie soit pleinement établi), on a :

- \mathcal{P} dominant pour k petit,
- T dominant pour k moyen,
- $2\nu k^2 E(k,t)$ dominant pour k grand.

Remarque

Ce processus de transfert vers les nombres d'onde croissants est très fréquent en turbulence bien qu'il ne soit pas la règle générale. En effet, on peut parfois observer des regroupements de petits tourbillons donnant naissance à une structure de taille plus importante. Le transfert se fait dans ce cas vers les nombres d'onde décroissants.

II.2.4. La notion d'échelle en turbulence

Il est nécessaire de connaître les ordres de grandeur des termes correspondant à une zone précise du spectre. Pour cela on associe à chaque type de structure des grandeurs caractéristiques appelées échelles de longueur, de temps ou de vitesse. En pratique on distingue deux types de structures :

Les gros tourbillons :

L'étude spectrale de la fluctuation de vitesse montre qu'une partie importante de l'énergie cinétique turbulente est contenue dans ces structures. Il est donc naturel de leur associer $u=k^{1/2}$ comme échelle de vitesse. On choisit une échelle de longueur, notée \mathcal{L} , liée à la taille des gros tourbillons (par exemple la taille de la maille dans le cas d'une turbulence de grille). Le temps caractéristique est évidemment défini par le rapport $\theta=\mathcal{L}/u$. A partir de ces grandeurs nous pouvons écrire que la quantité d'énergie cinétique turbulente qui quitte les grosses structures par unité de temps est proportionnelle à u^2/θ (rapport de la quantité d'énergie cinétique turbulente contenue dans les grosses structures au temps caractéristique).

Les petites structures dissipatives :

Compte tenu de l'expression de ϵ un temps caractéristique peut être défini par : $\epsilon = \nu/\tau^2$. Il est d'autre part admis que, pour ce type de structures, le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses (nombre de Reynolds) est de l'ordre de 1. On obtient alors la relation $u\ell/\nu = 1$. Où u et ℓ sont les échelles de vitesse et de longueur, ℓ est appelée échelle de Kolmogoroff.

II.2.5. L'hypothèse de l'échelle unique

Les échelles définies au paragraphe précédent sont, pour l'instant, des inconnues. Pour les exploiter nous devons faire l'hypothèse que la quantité d'énergie cinétique qui quitte les grosses structures par unité de temps (u^2/θ) est égale à la quantité d'énergie cinétique dissipée dans les petites structures (ϵ).

Cette hypothèse permet d'écrire que $\epsilon = C_D u^3/\ell$. Ainsi ϵ ne dépend que de l'état des grosses structures.

L'hypothèse de l'échelle unique est valable essentiellement pour des régimes pleinement turbulents. En effet les échelles énergétiques et dissipatives sont alors très disjointes, et le transfert de l'énergie en cascade, sur lequel est fondé le raisonnement précédent, est alors vérifié.

II.3. EQUATION DE POISSON POUR LA PRESSION

La modélisation du terme de corrélation pression vitesse que nous allons effectuer au paragraphe suivant est basée sur l'équation de Poisson pour la fluctuation de pression que nous allons décrire ici. Par dérivation de l'équation de Navier-Stokes [LAUNDER, 1984] nous obtenons :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = - \frac{\partial^2 (u_k u_i - \overline{u_k u_i})}{\partial x_k \partial x_i} - 2 \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

En intégrant cette équation à l'aide de la formule de Green, on obtient [LAUNDER, 1984] :

$$(4) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \left(\frac{\partial^2 (\overline{u'_k u'_l} - \overline{u'_k} \overline{u'_l})}{\partial x'_k \partial x'_l} + 2 \frac{\partial U'_k}{\partial x'_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right) \frac{d vol}{r} + I_s$$

où I_s est une intégrale de surface que nous négligerons par la suite.

U' et u' représentent respectivement les valeurs des vitesses moyenne et fluctuante au point de coordonnées x'_i situé à une distance r du point où l'on désire évaluer p .

II.4. LE TERME DE CORRÉLATION PRESSION VITESSE : Φ_{ij}

II.4.1 Décomposition du terme Φ_{ij}

Après avoir étudié l'aspect physique de la turbulence et établi la solution de l'équation de Poisson pour la pression, nous allons modéliser le terme de corrélation pression vitesse de l'équation de transport du tenseur de Reynolds.

On notera dans un premier temps, que la trace du terme de corrélation pression vitesse est nulle. Par suite Φ_{ij} ne produit ni ne détruit de turbulence, il la réorganise.

En utilisant (4) nous pouvons écrire [LAUNDER, 1984] la relation :

$$(5) \quad \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{4\pi} \int_{vol} \frac{\partial^3 \overline{u'_k u'_l u'_i}}{\partial x'_k \partial x'_l \partial x'_j} \frac{d vol}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial U'_k}{\partial x'_l} \int_{vol} \frac{\partial^2 \overline{u'_l u'_i}}{\partial x'_k \partial x'_j} \frac{d vol}{r}$$

On notera que l'intégrale de surface I_s présente dans la équation (4) n'intervient pas dans le calcul de $\frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ si l'on peut rejeter la surface assez loin car $\frac{\overline{p}}{\rho}$ et $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sont alors totalement décorrélés. Il faut pour cela que la surface soit à une distance de plusieurs fois l'échelle de longueur des grosses structures. Dans le cas contraire on obtient un terme supplémentaire dû à la présence de la paroi. En turbulence de grille l'échelle de longueur des grosses structures, de l'ordre de grandeur de la maille de la grille, est considérablement inférieure aux dimensions de la veine, l'intégrale de surface est donc parfaitement négligeable. Il n'en va pas de

même dans le cas d'une couche limite pour laquelle la taille des gros tourbillons est de l'ordre de grandeur de la couche.

L'équation (5) peut également s'écrire sous la forme :

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij2}$$

avec:

Φ_{ij} = Terme de corrélation pression vitesse

Φ_{ij1} = Terme non linéaire dit "de retour à l'isotropie"

Φ_{ij2} = Terme linéaire dit "partie brusque"

$$\Phi_{ij} = \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

$$\Phi_{ij1} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \frac{\partial^3 \overline{u_k' u_l' u_i}}{\partial x_k' \partial x_l' \partial x_j} \frac{d\text{vol}}{r}$$

$$(6) \quad \Phi_{ij2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \int_{\text{vol}} \frac{\partial^2 \overline{u_l' u_i}}{\partial x_k' \partial x_j} \frac{d\text{vol}}{r}$$

Le terme Φ_{ij2} prend une importance particulière dans le cas d'une turbulence isotrope soumise brutalement à un gradient de vitesse moyenne. En effet Φ_{ij1} est négligeable par rapport à Φ_{ij2} au début de la déformation et ne devient important que pour une anisotropie pleinement développée. Aussi l'évolution de l'anisotropie dans le premier stade de l'expérience est entièrement déterminée par le terme de production et par Φ_{ij2} . On parle souvent de Φ_{ij2} comme "partie brusque" du terme de corrélation pression vitesse.

II.4.2. Le tenseur d'anisotropie: a_{ij}

Afin de modéliser le terme de retour à l'isotropie, Φ_{ij1} , nous allons maintenant introduire une nouvelle grandeur caractéristique de l'écoulement : le tenseur d'anisotropie, a_{ij} . Pour ce faire, considérons un écoulement possédant les caractéristiques suivantes :

- Tous les $\partial U/\partial x_j$ sont nuls,
- La turbulence est homogène ($d_{ij}=0$),
- La turbulence est anisotrope.

Un écoulement possédant ces caractéristiques est réalisé dans une turbulence de grille. L'équation (2) devient alors :

$$\frac{d \overline{u_i u_j}}{dt} = \Phi_{ij1} - \epsilon_{ij}$$

Notons :

$$a_{ij} = (\overline{u_i u_j} - 2/3 \delta_{ij} k)/k$$

$$k = 1/2 \overline{u_k u_k}$$

En supposant la turbulence isotrope nous obtenons :

$$k \frac{da_{ij}}{dt} = \Phi_{ij1} + \epsilon a_{ij}$$

II.4.3. Le terme non linéaire : Φ_{ij1}

Pendant la décroissance d'une turbulence de grille en l'absence de gradient de vitesse moyenne le terme Φ_{ij2} est nul. Ce cas d'écoulement homogène est donc particulièrement intéressant pour l'étude du terme non linéaire Φ_{ij1} .

Si la turbulence est isotrope, Φ_{ij1} l'est aussi. D'après l'équation de continuité pour la fluctuation de vitesse la trace de Φ_{ij1} est alors nulle. Ce tenseur s'annule donc dans le cas d'une turbulence isotrope alors qu'il joue un rôle important dans le cas contraire. Compte tenu de ces remarques plusieurs auteurs ont exprimé Φ_{ij1} en fonction de a_{ij} .

II.4.3.1. Modélisation proposée par Rotta :

En régime permanent il est possible de modéliser Φ_{ij1} par la relation [ROTTA, 1951] [LAUNDER, 1975] :

$$\Phi_{ij1} + \Phi_{ji1} = - C_1 \epsilon a_{ij}$$

Malgré les erreurs de mesures réalisées sur a_{ij} , il semblerait que 1,8 soit une valeur possible pour C_1 .

II.4.3.2 Modélisation proposée par Lumley :

Cet auteur a proposé [LUMLEY, 1974] [LUMLEY, 1976] [LUMLEY,1978] de modéliser Φ_{ij1} par la relation ci dessous :

$$\Phi_{ij1} = - C_1 \varepsilon a_{ij} + C'_1 \varepsilon (a_{ik} a_{kj} - 1/3 \delta_{ij} a_{mk} a_{km})$$

Il est couramment admis que, d'après l'expérience, les valeurs de C_1 et C'_1 sont données par :

$$\begin{aligned} A &= a_{ij} a_{ij} \\ C_1 &= 1.2 + A \\ C'_1 &= -0.75 \end{aligned}$$

II.4.4. Le terme linéaire : Φ_{ij2}

Le tenseur Φ_{ij2} , linéaire par rapport aux dérivées de la vitesse moyenne, représente une redistribution de l'énergie entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds. L'évolution d'une turbulence homogène initialement isotrope et brutalement soumise à un gradient de vitesse moyenne fournit des indications intéressantes sur ce terme car la valeur de Φ_{ij1} peut être considérée comme négligeable au début de l'expérience.

Remarque : Φ_{ij2} est souvent négligé, à tort selon Launder [LAUNDER, 1984].

Nous allons maintenant voir quels sont les différents modèles utilisés pour évaluer cette grandeur.

II.4.4.1. Le modèle quasi isotropique (Q.I.M.)

Le tenseur de Reynolds possédant les mêmes symétries que l'intégrale définie par l'équation (6), plusieurs auteurs [HANJALIC, 1972], [LUMLEY, 1978] [ROTTA, 1951] ont posé :

$$(7) \quad \Phi_{ij2} + \Phi_{ji2} = \frac{\partial U}{\partial x_1} (a_{lkij} + a_{lkji})$$

$$a_{lkij} = \alpha \overline{u_i u_i} \delta_{kj} + \beta (\overline{u_i u_k} \delta_{ij} + \overline{u_i u_j} \delta_{ik} + \overline{u_i u_l} \delta_{lk} + \overline{u_i u_k} \delta_{lj})$$

$$+ C_2 \overline{u_k u_l} \delta_{il} + k (\eta \delta_{ij} \delta_{kj} + \nu (\delta_{ij} \delta_{ik} + \delta_{lk} \delta_{ij}))$$

Naot [NAOT, 1973] [REYNOLDS, 1976] montre que (7) peut se mettre sous la forme suivante qui constitue le modèle Q.I.M. :

$$(8) \quad \Phi_{ij2} + \Phi_{ji2} = \frac{76-C_2}{105} (C_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} C_{kk})$$

$$+ \frac{9+72C_2}{105} \frac{2}{3} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$+ \frac{22+64C_2}{105} (D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk})$$

$$D_{ij} = -(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U}{\partial x_i})$$

On notera que dans le cas d'une turbulence isotrope (c'est-à-dire pour laquelle $\overline{u_i u_j} = 2/3 \delta_{ij} k$) (8) devient:

$$(9) \quad \Phi_{ij2} + \Phi_{ji2} = 0.4 k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

II.4.4.2. Le modèle "Isotropisation of Production" (I.P.M.)

Lauder [LAUNDER, 1975] donne 0,4 pour la valeur du coefficient C_2 de l'équation (8). Le coefficient multiplicateur du premier terme du membre droit de l'équation est alors bien supérieur aux deux autres. Cet auteur a donc été amené à réécrire l'équation (8) sous la forme [NAOT, 1973] :

$$(10) \quad \Phi_{ij2} = -C'_2 (C_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} C_{kk})$$

C'est cette relation qui constitue le modèle I.P.M. On notera que, dans le cas d'une turbulence isotrope, si C'_2 vaut 0,6, alors (10) est équivalente à (9).

II.5. LE TERME DE DISSIPATION : ϵ_{ij}

II.5.1. Introduction du terme ϵ

La modélisation du tenseur ϵ_{ij} ne peut être réalisée simplement que dans le cas où il est possible d'admettre que ce tenseur est isotrope. C'est donc sous cette contrainte que le modèle que nous allons exposer ici a été développé.

Si $\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}}$ est un tenseur isotrope alors :

$$v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} = \frac{\epsilon}{30} (4 \delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})$$

et :

$$\epsilon_{ij} = 2/3 \delta_{ij} \epsilon$$

Le tenseur ϵ_{ij} peut donc s'écrire en fonction du scalaire ϵ qui sera obtenu par résolution d'une équation de transport.

II.5.2. L'équation de transport de ϵ

On déduit, des équations de Navier-Stokes, l'équation de transport de ϵ suivante :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = B + C + D + E + F$$

où :

$$\epsilon^* = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

$$B = - \frac{\partial}{\partial x_k} (v u_k \epsilon^* + \frac{2v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) - v \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k}$$

$$C = - 2v \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right)$$

$$D = 2 \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$E = - 2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}$$

$$F = - 2v^2 \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}}$$

La signification de ces termes est la suivante :

- B : Terme de création par diffusion,
- C et D : Termes de création dûs à l'écoulement moyen,
- E : Terme de création de ϵ due à la turbulence,
- F : Terme de destruction de ϵ due à la viscosité.

Lumley [LUMLEY, 1974] montre qu'il est possible de négliger les termes B,C et D de l'équation ci-dessus car ils représentent une corrélation entre les grandeurs moyennes et fluctuantes. D'autre part, cet auteur déduit [LUMLEY, 1978], de l'analyse dimensionnelle et de considérations physiques, que l'équation ainsi obtenue peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial \left(\frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right)}{\partial x_i} + c_1 \frac{\epsilon}{K} v_t \Phi - c_2 \frac{\epsilon^2}{K}$$

avec :

$$2 S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

$$\Phi = 2S_{ij} S_{ij}$$

$$c_1 = 1.44$$

$$c_2 = 1.92$$

$$\sigma_\epsilon = 1.30$$

Remarque : Comme il a été dit au paragraphe II.2.e, ϵ peut être relié à k par la relation :

$$\varepsilon = C_D \frac{u^3}{\ell} = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

où :

C_D est une constante empirique,

ℓ est l'échelle de longueur associée aux grosses structures.

II.6. LE TERME DE DIFFUSION : d_{ij}

II.6.1. Introduction du terme $\overline{u_i u_j u_k}$

Le terme de diffusion donné par l'équation (2) page 35 est défini par :

$$d_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{jk} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right)$$

Il représente le retour à l'homogénéité du champ des vitesses fluctuantes et est donc négligeable dans le cas d'une turbulence homogène. Afin que le calcul de ce terme, a priori négligeable, ne prenne pas trop de temps, il sera modélisé de façon aussi simple que possible.

Dans le cas d'écoulements à nombre de Reynolds élevés le terme de diffusion laminaire est négligeable, il en est de même pour le terme lié à la pression [CLERC, 1982].

Le terme de diffusion se ramène donc à :

$$d_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}$$

II.6.2. Modélisation de $\overline{u_i u_j u_k}$

Hanjalic et Launder [HANJALIC, 1972] ont modélisé le tenseur de corrélation triple par la relation :

$$\overline{u_i u_j u_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} + \overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_l} \right)$$

Lauder [LAUNDER, 1975] estime qu'il est possible de donner à C_s la valeur 0,11.

Daly et Harlow [DALY, 1970] [CORMACK, 1978] ont proposé la forme plus simple suivante :

$$\overline{u_i u_j u_k} = C'_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_l}}{\partial x_l}$$

Ils proposent de donner à C'_s la valeur 0,22.

II.7. L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE : k

Il est possible de déduire, à partir de l'équation (2), l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :

$$(11) \quad \frac{dk}{dt} = \mathcal{P} - \varepsilon + \frac{\partial \ell_j}{\partial x_j}$$

où :

$$\mathcal{P} = - \overline{u_i u_j} S_{ij}$$

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\ell_j = - \frac{1}{\rho} \overline{p u_j} - 1/2 \overline{u_j u_i u_i} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

A noter que le terme $\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2}$ de $\frac{\partial \ell_j}{\partial x_j}$, représentant la diffusion d'origine laminaire, est en général négligé.

Moyennant quelques approximations, (11) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)}{\partial x_i} + v_t \Phi - \varepsilon$$

avec :

$$2 S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

$$\Phi = 2S_{ij} S_{ij}$$

$$\sigma_k = 1,00$$

Rodi [RODI, 1972] montre que, dans le cas d'une turbulence isotrope, le tenseur de Reynolds peut être relié à l'énergie cinétique turbulente par la relation suivante :

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} - d_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{dk}{dt} + \frac{\partial k_j}{\partial x_j} \right)$$

où d_{ij} représente le terme de diffusion de l'équation de transport de $\overline{u_i u_j}$.

III. LES MODELES DE TURBULENCE

III.1. QUELQUES CONCEPTS IMPORTANTS

III.1.1. Description de la turbulence

Dans ce paragraphe nous allons reprendre et détailler quelques points essentiels vus au paragraphe B.II.2. Ces compléments sur la physique de la turbulence nous seront utiles pour bien comprendre l'origine des modèles que nous allons présenter.

La turbulence est constituée par une superposition de tourbillons qui se traduit par une fluctuation de vitesse. La gamme des dimensions de ces tourbillons est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est élevé.

Les gros tourbillons interagissent avec la vitesse moyenne d'écoulement (car ils ont des dimensions comparables) dont ils tirent leur énergie. Les petits tourbillons sont obtenus par destruction des gros. A chaque destruction il y a modification de l'axe de rotation du tourbillon, il s'ensuit une augmentation de l'isotropie avec la diminution de la taille des tourbillons.

L'énergie cinétique va donc des gros tourbillons, qui en contiennent la plus grosse partie, vers les plus petits où elle est dissipée. La quantité d'énergie transmise du mouvement moyen aux gros tourbillons est donc égale à la quantité d'énergie transformée en chaleur par les petits. L'étude des gros

tourbillons et du mouvement moyen suffit donc à modéliser l'énergie dissipée. Cette idée de cascade d'énergie a déjà été vue au paragraphe B.II.2 de façon plus formelle.

III.1.2. Le concept de viscosité turbulente

En régime turbulent il est pratiquement impossible de résoudre les équations de Navier-Stokes lorsque les inconnues sont les champs instantanés de vitesse et de pression. Les équations à résoudre sont donc réécrites avec comme inconnues les champs moyens de vitesse et de pression. La résolution des équations ainsi obtenues impose la connaissance du tenseur de Reynolds qui est, par suite, le but de tout modèle de turbulence.

En 1877 Boussinesq propose de déterminer ce tenseur en introduisant la notion de viscosité turbulente. Cette grandeur est définie par la relation :

$$(12) \quad -\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

La grandeur k présente dans l'équation (12) est appelée énergie cinétique turbulente et est définie par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$$

La présence du terme k dans l'équation (12) n'est pas gênante lors de la résolution de l'équation de Navier. Ce terme constitue en effet un champ scalaire qui vient s'ajouter au champ de pression statique pour constituer un nouveau champ de pression défini par : $P + 2/3 * k$.

Une fois l'équation (12) posée, l'estimation du tenseur de Reynolds se ramène à celle de la viscosité turbulente. Cette quantité est en général considérée comme étant le produit d'une distance (appelée échelle de longueur) par une vitesse (appelée échelle de vitesse).

$$\nu_t \approx uL$$

III.1.3. Le concept de diffusivité turbulente

Les transferts de matière ou de chaleur dans les milieux turbulents sont modélisés grâce à l'équation (13) donnée ci-dessous, dans laquelle λ représente la diffusivité turbulente. L'estimation du terme inconnu de cette relation est obtenue en introduisant la diffusivité turbulente Γ :

$$(13) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \overline{u_i \phi} \right) \\ - \overline{u_i \phi} = \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Le calcul de cette diffusivité se fait en introduisant les nombres de Schmidt ou de Prandtl [RODI, 1980] σ_t ,

$$\Gamma = \frac{\nu_t}{\sigma_t}$$

- * $\sigma_t = 0,9$ près des parois
- * $\sigma_t = 0,7$ dans les jets circulaires
- * $\sigma_t = 0,5$ dans les jets plans et les cuves agitées

Les nombres de Schmidt ou de Prandtl ont la même valeur.

III.2. LES MODELES A ZÉRO ÉQUATION

III.2.1. Les modèles de longueur de mélange

Ce modèle, introduit en 1925 par Prandtl, est connu sous le nom d'hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl [COMOLET, 1981] [RODI, 1980].

Description du modèle :

Ce type de modèle est applicable si, en tout point, il y a équilibre entre la production et la dissipation d'énergie turbulente. Il ne prend donc pas en compte les phénomènes de transport d'énergie turbulente. Ce manque d'universalité se traduit par la nécessité de changer la valeur des constantes en fonction de l'écoulement étudié.

Comme nous l'avons dit plus haut la viscosité turbulente est obtenue en multipliant l'échelle de vitesse par l'échelle de longueur.

L'échelle de vitesse :

Elle est définie, à partir de l'échelle de longueur notée \mathcal{L} . Dans le cas d'un écoulement dans la direction de l'axe des x , telles que les dérivées partielles de la vitesse par rapport aux variables d'espace x et z soient nulles, nous pouvons écrire:

$$(14) \quad u = \mathcal{L} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Ou encore, dans le cas d'un écoulement quelconque : $u = \mathcal{L} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]^{1/2}$

A noter que l'équation (14) entraîne la formule classique :

$$(15) \quad v_t = \mathcal{L}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

L'échelle de longueur :

Plusieurs auteurs ont proposé des relations empiriques permettant d'évaluer la longueur de mélange. Nous allons présenter successivement les relations proposées par Prandtl, van Driest et Nikuradse.

Prandtl définit cette échelle par une longueur de mélange, notée l_m . Près des parois cette grandeur est estimée à l'aide de la courbe 13.

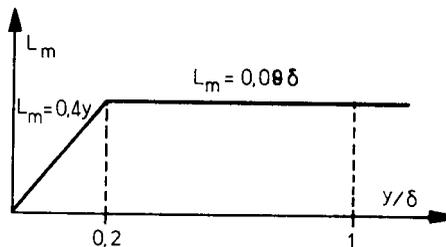


Figure 13. Evolution de la longueur de mélange en fonction de la distance à la paroi.

où δ est la distance à la paroi où la vitesse d'écoulement atteint 99% de la vitesse moyenne.

Dans une sous couche visqueuse la longueur de mélange peut être évaluée à l'aide de la relation de van Driest:

$$l_m = \chi y \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]$$

avec :

$$y^+ = \frac{y(\tau_w/\rho)^{1/2}}{\nu}$$

où τ_w est la contrainte à la paroi.

Certains auteurs ont proposé des relations permettant d'évaluer la longueur de mélange dans des conditions particulières. Ainsi dans les chenaux la longueur de mélange est donnée par la relation classique de Nikuradse [NALLASAMY, 1980] :

$$\frac{l_m}{R} = 0,14 - 0,08 (1-y/R)^2 - 0,06 (1-y/R)^4$$

R est la profondeur du canal,

y est la distance à la paroi la plus proche.

Remarque : L'un des principaux défauts de ces modèles est que, si la dérivée partielle de U par rapport à y est nulle, la viscosité turbulente l'est aussi, ce qui est loin d'être évident, notamment sur l'axe d'une tuyauterie où elle vaut 80 % de sa valeur maximale sur la section. Si ceci n'est pas important pour le calcul de l'écoulement, les profils de concentration ou de température sont très touchés, les flux étant mal évalués au niveau de l'axe de symétrie.

III.2.2. Modèle d'écoulement libre en cuve

Ce modèle, proposé en 1942 par Prandtl, est applicable uniquement aux écoulements libres en cuve. Il utilise une viscosité turbulente constante sur une section de la cuve.

L'échelle de longueur est supposée être proportionnelle à la largeur de la cuve, et l'échelle de vitesse à $U_{\max} - U_{\min}$ sur une section.

La viscosité turbulente est alors donnée par la formule :

$$v_t = 0,015T \left| U_{\max} - U_{\min} \right|$$

où T est la largeur de la cuve.

III.3. LES MODELES A UNE ÉQUATION

Dans les modèles à zéro équation la viscosité turbulente était obtenue par résolution d'une équation algébrique. Les modèles que nous allons étudier ici prennent en compte l'équation de transport d'une des quantités représentatives de la turbulence. L'équation liée à k est en général choisie, bien que certains modèles utilisent la viscosité turbulente [RODI, 1980].

L'échelle de vitesse :

Comme nous l'avons vu lors de l'étude de l'aspect spectral de la turbulence, l'échelle de vitesse peut être prise égale à la racine carrée de k. On a alors une échelle de vitesse représentative des gros tourbillons.

La valeur de k nous est donnée en tout point du domaine étudié par la résolution de l'équation de transport donnée au paragraphe B.II.7 dans laquelle le terme de dissipation est pris égal à $C_D k^{3/2}/\ell$.

La viscosité turbulente est alors donnée par la relation de Prandtl et Kolmogoroff :

$$(16) \quad v_t = c'_\mu k^{1/2} \ell$$

c'_μ est une constante empirique.

Cas particulier important :

Lorsque, en tout point du fluide, il y a égalité entre les termes de production et de destruction de l'équation de transport de k, elle se transforme en :

$$v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell} = \varepsilon$$

qui, avec la relation (16), permet de retrouver l'équation (15) donnée par le modèle de la longueur de mélange.

L'échelle de longueur :

Les méthodes d'évaluation de la longueur de mélange décrites lors de l'étude des modèles à zéro équation sont toujours valables ici. Il est toutefois possible d'utiliser de nouvelles corrélations permettant d'évaluer cette grandeur à partir de l'énergie cinétique turbulente désormais disponible grâce à l'équation de transport que nous venons d'introduire. Nous ne donnerons ici qu'un exemple de méthode permettant de calculer l'échelle de longueur à partir de k . L'exemple que nous avons choisi nous est donné par Bobyleve.

$$\ell = \chi \frac{\psi}{\partial\psi/\partial y} \quad \text{avec} \quad \psi = \frac{k^{1/2}}{\ell}$$

Cette relation est une généralisation de la relation (16) dans laquelle $\frac{\partial U}{\partial y}$ a été remplacé par ψ . Cette nouvelle formule n'est toutefois applicable que lorsque la turbulence se déplace dans une seule direction, ici celle des y .

Conclusion :

Ce type de modèle est constitué de l'équation de Navier, de l'équation de conservation de la masse, d'une équation de transport de k , d'une équation scalaire donnant l'échelle de longueur et de l'équation (16). Il comporte donc trois équations aux dérivées partielles et deux équations scalaires permettant de déterminer les cinq inconnues: U , p , k , ℓ et v_t .

Les modèles à une équation rendent assez bien compte des phénomènes de transport de turbulence.

L'estimation de l'échelle de longueur représente le principal obstacle à l'utilisation de ces modèles. Il a été résolu par l'utilisation d'une équation de transport supplémentaire ce qui a donné naissance aux modèles à deux équations.

III.4. UN MODELE A DEUX ÉQUATIONS: LE MODELE k-ε

Compte tenu de ce que nous avons dit au paragraphe B.II il est possible, dans le cas d'une turbulence homogène pleinement établie, d'évaluer le tenseur de Reynolds à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{u_i u_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} = C_{te} \frac{1}{\varepsilon} (C_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk})$$

avec :

$$C_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

Cette méthode d'évaluation constitue le modèle algébrique de stress (A.S.M.). En rajoutant à ce modèle la condition d'une turbulence isotrope il est possible d'obtenir l'expression du tenseur de Reynolds énoncée ci-après [LAUNDER, 1981] :

$$\begin{cases} \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k = -\nu_t (U_{ij} + U_{ji}) \\ \nu_t = C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon} \end{cases}$$

Cette façon d'estimer le tenseur de Reynolds constitue le modèle k-ε. Comme nous l'avons vu dans le texte qui a précédé, ce modèle n'est applicable que dans le cas d'une turbulence pleinement développée, homogène et isotrope.

IV. CONDITIONS AUX LIMITES

IV.1. INTRODUCTION

Les conditions aux limites que nous utiliserons pour réaliser nos simulations sont présentées dans les paragraphes ci-dessous. Les différents types de frontières que nous avons envisagés sont les suivants :

- les entrées ou les sorties libres,
- les surface libres,
- les parois,
- les jets,
- les hélices.

IV.2. LES ENTRÉES ET LES SORTIES LIBRES

Les entrées et les sorties libres de fluide au travers d'une surface ont été modélisées en considérant des contraintes tangentielles et normales à la surface nulle. Ainsi, par exemple, dans le cas où l'axe des x est normal à la surface considérée $\partial\Omega$, nous avons pris les contraintes τ_{xy} , τ_{xz} et σ_{xx} nulles.

Des dérivées en k et ε nulles suivant la normale à la frontière sont imposées comme conditions aux limites.

IV.3. LES SURFACES LIBRES

L'étude que nous présentons ici ne prend pas en compte le cas d'une déformation de surface libre. Nous avons donc modélisé les surfaces libres comme une frontière de type "entrée libre de fluide" dans laquelle la condition de nullité de la contrainte normale à la surface a été remplacée par une condition de vitesse normale à la surface nulle.

IV.4. LES PAROIS

IV.4.1. Introduction

Nous allons dans ce paragraphe décrire la façon dont nous avons modélisé une paroi. Dans un premier temps nous décrivons du point de vue de la mécanique des fluides les caractéristiques d'un écoulement de paroi. Puis, dans une deuxième partie, nous donnerons les conditions aux limites que nous avons utilisées pour modéliser ce type de frontière.

IV.4.2. Description de l'écoulement de paroi

Nous allons considérer le cas d'une paroi de normale y au contact de laquelle s'écoule un fluide dans la direction des z . Ce type d'écoulements est décrit grâce aux grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$U^+ = U/U^* \quad \text{pour la vitesse parallèle à la paroi,}$$
$$y^+ = \frac{\rho Y U^*}{\mu} \quad \text{pour la distance à la paroi.}$$

où :

- U^* est la vitesse de friction évaluée empiriquement par $U \sqrt{\frac{f}{4}}$,
 τ_w est la contrainte à la paroi,
 ρ est la masse volumique,
 \bar{U} est la vitesse moyenne de l'écoulement,
 Y est la distance à la paroi.

A proximité d'une paroi le profil de vitesse est donné sous forme d'une fonction $U^+=f(y^+)$ par la figure 14. La courbe représentée sur cette figure, obtenue expérimentalement, peut être lissée par la relation de Reichardt :

$$U^+ = (1/\chi)\ln(1+0.4y^+) + 7,8 [1-\exp(-y^+/11)-y^+\exp(-0,33y^+/11)]$$
$$0 < y^+ < 1000$$

La nature turbulente d'un écoulement de paroi peut être caractérisée en considérant trois zones, comme défini sur la figure 15.

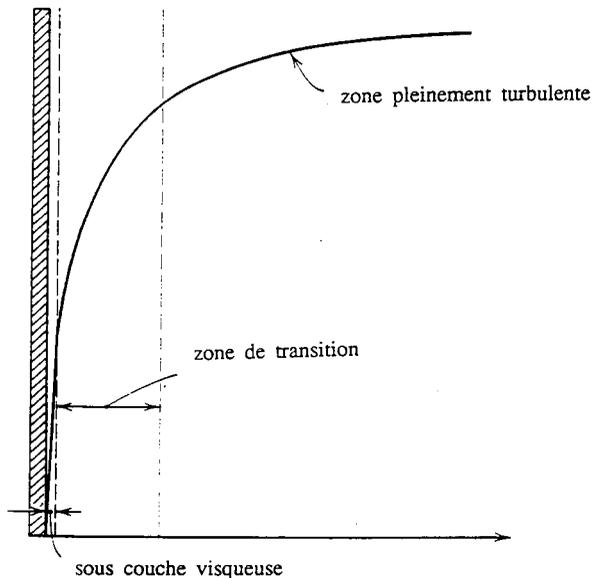


Figure 15. Zones caractéristiques de la turbulence au contact d'une paroi.

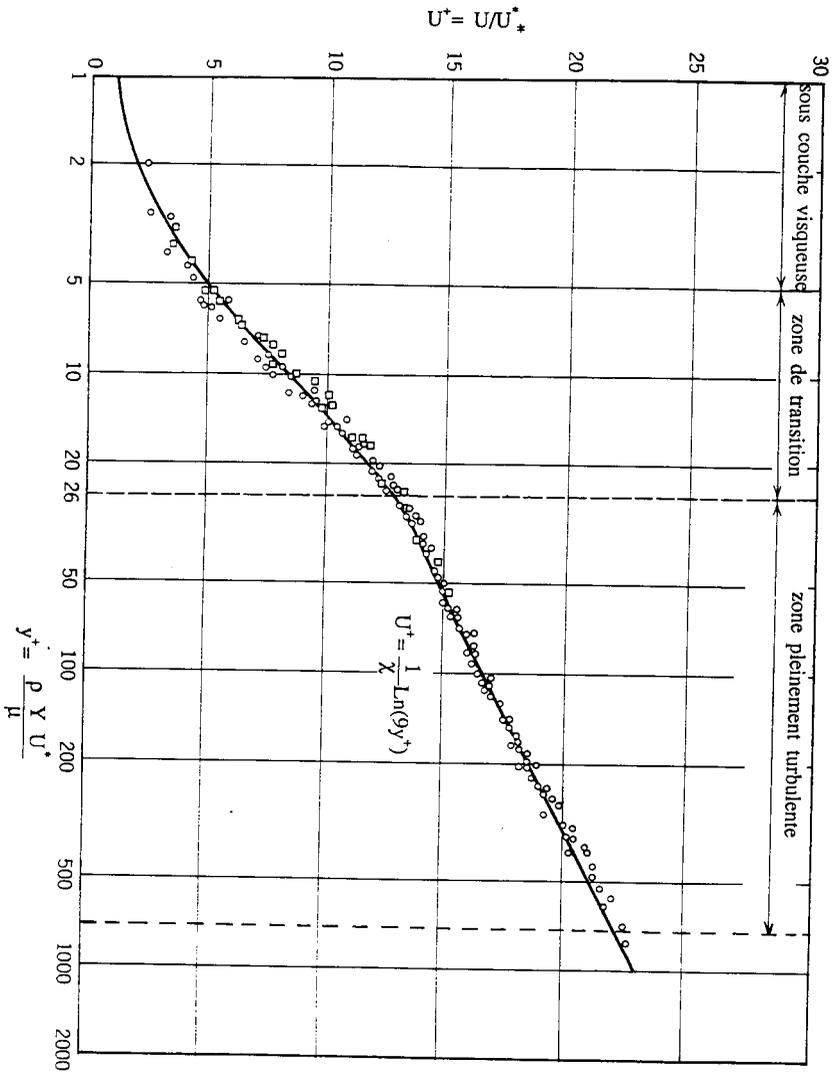


Figure 14. Profil adimensionnel de vitesse au contact d'une paroi.

Les deux zones les plus proches de la paroi définissent un domaine que nous noterons Ω_p dans lequel la viscosité turbulente peut être estimée à l'aide de la relation de van Driest, déjà citée au paragraphe B.III.2.1. :

$$\mu_t = \rho_m^2 \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]^{1/2}$$

$$l_m = \chi y \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]$$

La couche la plus éloignée de la paroi que nous noterons Ω_c est dite logarithmique. Dans cette zone l'équilibre entre les termes de production et de dissipation de l'équation (2) (page 35) est supposé atteint. Les autres termes de (2) sont considérés comme négligeables. Compte tenu du fait que seuls les gradients dans la direction des y ne sont pas négligeables, cette équation permet d'obtenir, à l'aide de (12), la relation :

$$v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon$$

De plus, comme représenté sur la figure 14, la relation de Reichardt peut être approximée dans cette région par :

$$U^+ = \frac{1}{\chi} \text{Ln}(9y^+)$$

Compte tenu du fait que $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$, et que, dans la zone considérée, nous pouvons appliquer la relation empirique $U^{*4} = k^2 C_\mu$, les relations ci-dessus donnent :

$$\varepsilon = \frac{U^{*3}}{\chi y}$$

$$k = \frac{U^{*2}}{\sqrt{C_\mu}}$$

Soit encore :

$$(17) \quad \varepsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\chi y}$$

$$(18) \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

IV.4.3. Conditions aux limites utilisées

Lors de la modélisation d'une paroi la turbulence a été prise en compte à l'aide de la relation de van Driest dans le domaine Ω_p . Il s'ensuit que les équations aux dérivées partielles associées à k et ε ont leurs conditions aux limites fixées sur la frontière du domaine Ω_c notée $\partial\Omega_c$. Comme nous venons de le voir les relations (17) et (18) peuvent être prises comme conditions aux limites à ces équations.

Les conditions aux limites données sur le champ de vitesse au contact de la paroi sont simples : $\vec{U}=\vec{0}$.

En conclusion de ce paragraphe nous rappellerons que le domaine sur lequel nous intégrerons les équations de Navier-Stokes est différent du domaine sur lequel les équations de transport de k et de ε seront intégrées.

IV.5. LES JETS

La modélisation des jets que nous avons utilisés dans les bassins à trois dimensions ou dans les cuves cylindriques a été réalisée en considérant une vitesse axiale en sortie de jet constante et une vitesse radiale nulle. D'autre part, les conditions aux limites en k et ε nous ont été suggérées d'après l'expérience [NALLASAMY, 1987] et sont respectivement données par les relations :

$$k = 0.003 \bar{U}^2$$

$$\varepsilon = 6 \frac{k^{3/2}}{D}$$

Où

\bar{U} est la vitesse en sortie du jet

D est le diamètre du jet

Comme les modélisations que nous allons réaliser le montreront les conditions aux limites en k et ε énoncées ci-dessus ont peu d'influence sur la nature turbulente de l'écoulement. En effet, lors de la modélisation d'un jet nous constaterons que la turbulence est essentiellement générée par les contraintes de cisaillement présentes en périphérie du jet et que les

conditions aux limites en k et ε imposées sur la surface du jet n'ont qu'un effet secondaire.

IV.6. LES HÉLICES

Nous allons maintenant décrire les conditions aux limites employées dans nos calculs pour modéliser une frontière du domaine correspondant à une hélice.

Le but de l'étude que nous présentons ici est de modéliser les écoulements engendrés par un ou plusieurs jets dans un bassin de grand volume. Cette modélisation est destinée à évaluer, d'une part, les paramètres globaux caractéristiques du fonctionnement hydrodynamique des bassins, d'autre part, les profils de vitesses dans des zones relativement éloignées des régions où sont générés les jets. En effet les zones situées en sortie de jet sont caractérisées par des vitesses d'écoulement élevées et donc ne constituent pas un point critique lors du dimensionnement des bassins. L'étude de Raschid-Sally [RASCHID-SALLY, 1984] a montré que, à vitesse et diamètre identiques, l'action d'un jet sur les paramètres qui nous intéressent est la même quelle que soit la façon dont ce jet a été généré.

C'est pourquoi, dans l'étude en trois dimensions des bassins présentée plus loin, nous avons modélisé une hélice par un jet carré de même surface et d'égal débit de pompage. Comme nous le verrons par la suite, cette façon de faire nous a donné des résultats convenables dans tout le bassin mis à part les zones situées immédiatement en sortie des hélices.

CHAPITRE C

Etude numérique

I. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents nous nous sommes attachés à établir et à comprendre la physique et la formulation mathématique de notre problème.

Nous allons maintenant décrire la méthode numérique utilisée lors de la résolution des équations aux dérivées partielles obtenues. La technique de résolution employée est celle des éléments finis.

II. HISTORIQUE ET INTÉRÊT DE LA TECHNIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS

C'est en 1943 que le premier article traitant des éléments finis est publié par Courant. Mais il faudra attendre 1955 pour que les ingénieurs commencent à s'intéresser à ces méthodes pour les problèmes de mécanique, et 1960 pour que les mathématiciens leur donnent leurs formalismes actuels. L'utilisation des éléments finis pour les problèmes de mécanique des fluides est plus récente (1970 environ). Aujourd'hui encore, l'application de ces méthodes pour les problèmes industriels relève en partie de la recherche.

Le premier avantage des méthodes aux éléments finis est leur grande rigueur, notamment pour la prise en compte des conditions aux limites, les interpolations et le passage du problème continu au problème discret. Elles renvoient à des principes mathématiques bien connus ce qui favorise la conception d'algorithmes efficaces en permettant de mieux cerner les difficultés.

Mais, outre ce formalisme mathématique très strict, elles offrent la possibilité d'adapter parfaitement le maillage à la géométrie, ce qui a fait leur succès. Ne s'appuyant plus comme les méthodes aux différences finies sur des maillages structurés de type grille, les éléments permettent d'une part d'approcher des frontières de forme complexe et d'autre part de raffiner localement le maillage là où cela est nécessaire.

Les méthodes aux éléments finis restent toutefois plus chères que leurs concurrentes, à cause précisément, de la non structuration de leur maillage.

III. DESCRIPTION DE LA TECHNIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS

III.1. PASSAGE DU PROBLEME DIFFÉRENTIEL AU PROBLEME INTÉGRAL

Nous allons considérer ici les équations qui décrivent l'écoulement turbulent en régime permanent d'un fluide visqueux incompressible. Nous admettons que ce fluide est confiné dans un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ et qu'il est soumis à la seule force extérieure de la pesanteur. La nature turbulente de l'écoulement sera prise en compte à l'aide du modèle k- ϵ dans le sous domaine Ω_c de Ω constitué de l'ensemble des points de Ω dont la distance à $\partial\Omega$ est telle que la valeur du paramètre y^+ (défini au chapitre B paragraphe IV.4.2) qui leur est associée soit supérieure à 30. Nous noterons $\partial\Omega_c$ la frontière du domaine ainsi défini. Notons Ω_p le domaine tel que $\Omega_c \cup \Omega_p$ soit égal à Ω . Le domaine Ω_p étant trop proche des parois le modèle k- ϵ cité ci-dessus ne peut être utilisé pour modéliser l'écoulement. La nature turbulente de l'écoulement dans Ω_p sera donc prise en compte en utilisant des relations semi-empiriques comme il a été décrit au chapitre B.

Compte tenu des considérations ci-dessus, le problème que nous avons à résoudre peut se formuler de la façon suivante :

Soit à trouver la fonction vectorielle U et les fonctions scalaire P , k et ϵ vérifiant :

$$(19) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} -\mu(U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} + P_{,i} + \rho U_j U_{i,j} = \rho g_i \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \text{dans } \Omega \\ \nabla \vec{U} = 0 \\ \mu = \mu_{lam} + \mu_t \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \mu_t = \rho l_m^2 \left[(U_{i,j} + U_{j,i}) U_{i,j} \right]^{1/2} \\ \mu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{dans } \Omega_p \\ \left. \begin{array}{l} \rho U_j k_{,j} - \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + \rho \varepsilon = \mu_t \Phi \\ \rho U_j \varepsilon_{,j} - \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + \rho c_{2k} \frac{\varepsilon^2}{k} = \mu_t c_{1k} \frac{\varepsilon}{k} \Phi \end{array} \right\} \text{dans } \Omega_c \\ \left. \begin{array}{l} \vec{U} = \vec{0} \\ k \text{ fixé sur un sous-ensemble de } \partial\Omega \\ \frac{\partial k}{\partial n} = 0 \\ \varepsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\chi y} \end{array} \right\} \text{sur } \partial\Omega_c \end{array}$$

avec:

$$\begin{aligned} \Phi &= 2S_{ij} S_{ij} & \mu &= \text{Viscosité apparente} \\ 2S_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} & \mu_{lam} &= \text{Viscosité laminaire} \\ l_m &= \chi y \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right] & \mu_t &= \text{Viscosité turbulente} \end{aligned}$$

Le système dont nous disposons est donc constitué, d'une équation vectorielle avec dérivées secondes, de deux équations scalaires avec dérivées secondes et d'une équation scalaire avec divergence. Nous avons mis ici des conditions aux limites les plus simples possibles pour ne pas compliquer inutilement les formules à venir. Remarquons que, vu le manque de conditions aux limites sur la pression, la fonction P trouvée sera définie à une constante près.

Nous allons maintenant transformer le système (19) en introduisant les fonctions tests v et w afin d'obtenir la formulation intégrale suivante :

$$\left. \begin{array}{l}
 \int_{\Omega} v \left[-\mu \left(U_{i,j} + U_{j,i} \right)_{,j} + P_{,i} + \rho U_j U_{i,j} \right] d\omega = \int_{\Omega} v p g_i d\omega \\
 \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, 3 \\
 \qquad \qquad \qquad \forall v \text{ définie sur } \Omega \\
 \int_{\Omega} w U_{i,i} d\omega = 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \forall w \text{ définie sur } \Omega \\
 \mu = \mu_{1am} + \mu_t \\
 \mu_t = \rho l_m^2 \left[\left(U_{i,j} + U_{j,i} \right) U_{i,j} \right]^{1/2} \\
 \mu_t = c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon} \\
 \int_{\Omega_c} v \left[\rho U_j k_{,j} - \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + p \varepsilon \right] d\omega = \int_{\Omega_c} v \mu_t \Phi d\omega \\
 \qquad \qquad \qquad \forall v \text{ définie sur } \Omega \\
 \int_{\Omega_c} v \left[\rho U_j \varepsilon_{,j} - \left(\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + \rho c_{2k} \frac{\varepsilon^2}{k} \right] d\omega = \int_{\Omega_c} v \mu_t c_1 \frac{\varepsilon}{k} \Phi d\omega \\
 \qquad \qquad \qquad \forall w \text{ définie sur } \Omega \\
 \vec{U} = \vec{0} \\
 k \text{ fixé sur un sous-ensemble de } \partial\Omega \\
 \frac{\partial k}{\partial n} = 0 \\
 \varepsilon = \frac{c_{\mu}^{3/4} k^{3/2}}{\chi y}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{dans } \Omega \\
 \\
 \\
 \\
 \text{dans } \Omega_p \\
 \\
 \text{dans } \Omega_c \\
 \\
 \text{sur } \partial\Omega \\
 \\
 \text{sur } \partial\Omega_c
 \end{array}$$

L'intégration par parties des termes de ce système contenant la viscosité ou la pression nous permet d'éliminer les dérivées secondes et les dérivées d'espace de la pression. Nous obtenons alors le système :

En allant du système (19) au système (20) nous sommes passés d'un système différentiel à un système intégral que l'on doit vérifier quelles que soient les fonctions tests v et w définies sur Ω

III.2. FORMALISATION

Dans ce chapitre nous allons seulement introduire de nouvelles notations et définitions qui nous seront utiles par la suite. Pour ce faire, nous nous aiderons de la figure 16.

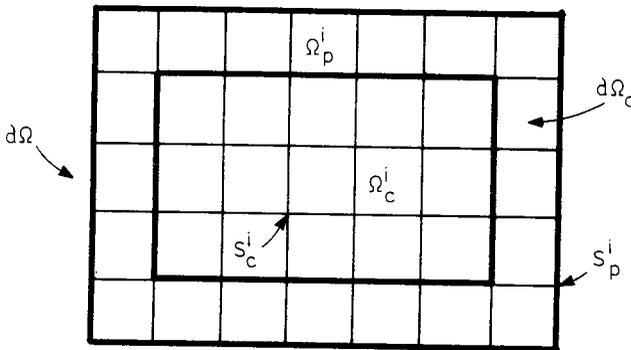


Figure 16. Notations utilisées lors de la formulation du problème variationnel.

Définition : Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^3 , si l'on note $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω , et si l'on considère la dérivation au sens des distributions, on peut définir [CHABARD, 1989] l'ensemble $H^m(\Omega)$ par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \in L^2(\Omega) \text{ pour } i_1 + \dots + i_n = k, \forall k \in \{1, m\} \right\}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{k=m} \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right] d\Omega$$

Notations:

Soit V_c l'espace $H^1(\Omega_c)$

Soit V_p l'espace $H^1(\Omega_p)$

Soit V l'espace $V_c \cup V_p$

Définition : Une triangulation de Ω_s (Ω_s étant successivement égal à Ω , Ω_p , Ω_c) est un recouvrement par des polyèdres (rectangles, triangles, trapèzes, tétraèdres ou briques), notés $\Omega_s^1, \Omega_s^2, \dots$, d'intérieurs disjoints, possédant les propriétés suivantes:

- * Deux éléments ne peuvent avoir en commun qu'un sommet, un côté ou une face.
- * Deux éléments adjacents doivent avoir tout un côté ou une face en commun.
- * Les sommets de $\partial\Omega_s^n$ ($\partial\Omega_s^n$ frontière de la réunion des éléments Ω_s^i) doivent être sur la frontière $\partial\Omega_s$ de Ω_s . Réciproquement, les points singuliers de $\partial\Omega_s$ doivent être sur des sommets de $\partial\Omega_s^n$.

Dans ce qui suit nous considérerons une triangulation de Ω_c dont les éléments seront notés Ω_c^i et une triangulation de Ω_p dont les éléments, notés Ω_p^i , auront tous une intersection non nulle avec $\partial\Omega$. La réunion de ces deux triangulations constitue une triangulation de l'espace Ω dont les éléments seront notés Ω^i . Nous noterons S_c^i les éléments de S_c , ensemble des sommets des Ω_c^i , S_p^i les éléments de S_p , ensemble des sommets des Ω_p^i , S la réunion de S_c^i et S_p^i dont les éléments seront notés S^i .

Compte tenu des notations et des définitions que nous venons d'introduire, et pour justifier la validité des formules en s'assurant l'existence des intégrales qui y figurent, nous devons écrire le problème de Navier-Stokes de la façon suivante :

Trouver $U_1 \in V$, $U_2 \in V$, $U_3 \in V$, $k \in V_c$, $\varepsilon \in V_c$ et $P \in L^2(\Omega)$ tel que le système (20) soit vérifié.

III.3. L'APPROXIMATION VARIATIONNELLE

Dans ce qui précède, les espaces V et $L^2(\Omega)$ sont, a priori, de dimension infinie. Pour obtenir une approximation numérique de la solution nous allons remplacer le problème précédent par un problème approché posé dans un espace de dimension finie.

Avant de réécrire le problème ainsi modifié introduisons les définitions suivantes :

Soit V_c^h un sous espace de V_c , de dimension finie I_c^h ,

Soit V_p^h un sous espace de V_p , de dimension finie I_p^h ,

Soit $V^h = V_c^h \cup V_p^h$, un sous espace de V , de dimension finie $I^h = I_c^h + I_p^h$,

Soit L^h un sous espace de $L^2(\Omega)$, de dimension finie J^h ,

Où h est lié à la dimension des espaces : $I^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$ et $J^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$.

Soit $\varphi^c = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{I_c}\}$ une base de V_c^h , telle que $\varphi_i(S^j) = \delta_{ij}$,

Soit $\varphi^p = \{\varphi_{I_c+1}, \dots, \varphi_{I_h}\}$ une base de V_p^h , telle que $\varphi_i(S^j) = \delta_{ij}$,

Soit $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{I_c}, \dots, \varphi_{I_h}\}$ une base de V^h déduite de φ^c et φ^p ,

Soit $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{J^h}\}$ une base de L^h , telle que $\psi_i(M) = 1$ si $M \in \Omega^i$ et, $\psi_i(M) = 0$ si $M \notin \Omega^i$.

Après avoir posé ces définitions, les solutions $U_1, U_2, U_3, k, \varepsilon$ et P du problème énoncé plus haut peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de ces bases :

$$U_j = U_j^i \varphi_i = U_j \varphi^i \quad j = 1, 2, 3$$

$$k = K^i \varphi_i = K \varphi^i$$

$$\varepsilon = E^i \varphi_i = E \varphi^i$$

$$P = P^i \psi_i = P \psi^i$$

Les termes U_1^i, U_2^i, U_3^i, K^i et E^i , coefficients de ces combinaisons linéaires représentent les valeurs prises par les fonctions solutions cherchées aux points S^i . Les termes P^i représentent les valeurs prises par la fonction solution P cherchée sur les domaines Ω^i . La fonction P solution de la pression obtenue n'est pas nécessairement continue.

En utilisant l'expression des solutions citée plus haut, nous remplaçons la fonction v élément de V^h , successivement par tous les éléments de la base φ , et la fonction w élément de L^h , successivement par tous les éléments de la

base ψ ; notre problème se ramène alors à chercher les vecteurs U_1, U_2, U_3, K, E et P tels que :

$$\begin{pmatrix} 2D_{11}+D_{22}+D_{33} & D_{12} & D_{13} & -C_1 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{11}+2D_{22}+D_{33} & D_{23} & -C_2 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{11}+D_{22}+2D_{33} & -C_3 & 0 & 0 \\ -C_1^t & -C_2^t & -C_3^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ P \\ K \\ E \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \sum A_i(U_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum A_i(U_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum A_i(U_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \sum A_i(U_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum A_i(U_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ P \\ K \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix}$$

Les valeurs des coefficients des matrices $\Gamma^h \times \Gamma^h$ figurant dans ce système étant définies par :

$$D_{ij} = \int_{\Omega} \mu \phi_i \phi_j' d\omega \quad i=1,2,3; j=1,2,3$$

$$C_i = \int_{\Omega} \phi_i \psi' d\omega$$

$$A_i(U_j) = \int_{\Omega} \rho \phi U_j \phi_i' d\omega \quad i=1,2,3; j=1,2,3$$

$$F_i = \int_{\partial\Omega^t} t_i \phi d\gamma + \int_{\Omega} \rho \phi g_i d\omega \quad i=1,2,3$$

$$D_{66} = \int_{\Omega} \frac{\mu}{\sigma_c^k} \phi_i \phi_i' d\omega + \int_{\Omega} \rho c_c^k \phi \phi' d\omega$$

$$D_{77} = \int_{\Omega} \frac{\mu}{\sigma_c^e} \phi_i \phi_i' d\omega + \int_{\Omega} \rho c_c^e \phi \phi' d\omega$$

$$F_6 = \int_{\partial\Omega_c^k} \frac{\mu}{\sigma_c^k} \frac{\partial k}{\partial n} \phi d\gamma + \int_{\Omega} \mu \phi \Phi d\omega$$

$$F_7 = \int_{\partial\Omega_c} \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \varphi d\gamma + \int_{\Omega_c} c_i \mu_t \varphi_k^\varepsilon \Phi d\omega$$

L'évaluation des coefficients du système matriciel que nous venons de définir nécessite la connaissance des fonctions formant les bases des espaces V^h et L^h . Nous allons, dans les paragraphes suivants, décrire ces fonctions.

Nous décrirons, dans un premier temps la base de l'espace L^h . Puis nous étudierons les fonctions de base de l'espace V^h en considérant tout d'abord la base du sous espace V_c^h puis celle du sous espace V_p^h .

III.4. ETUDE DE LA BASE ψ DE L^h

Les fonctions ψ_i constituant la base ψ sont définies par :

$$\forall M \in \Omega^i, \psi_i(M) = 1$$

$$\forall M \notin \Omega^i, \psi_i(M) = 0$$

La seule définition des fonctions ψ_i que nous venons de donner est suffisante pour évaluer les coefficients de la matrice que nous avons à résoudre. Les fonctions ψ_i ainsi définies ne sont pas dérivables mais cela ne constitue pas un obstacle pour nos calculs.

III.5. ETUDE DE LA BASE φ^c DE V_c^h

III.5.1. Introduction

Afin de pouvoir évaluer simplement les coefficients du système matriciel déduit de notre problème les fonctions φ_i , élément de φ , sont prises égales aux polynômes de Lagrange associé à chacun des points S^i définissant notre maillage. Dans un même esprit le calcul des intégrales nécessaires à l'évaluation de ces coefficients sera fait successivement sur chacun des sous-domaines définis lors du maillage. Dans ce qui suit les fonctions φ_i seront donc définies analytiquement par rapport à un repère associé au sous-domaine sur lequel elles doivent être intégrées. Sur chacun des sous

domaines considérés nous sommes donc amenés à définir, dans le cas où l'espace V^h est de dimension deux, quatre fonctions que nous noterons: φ^a , φ^b , φ^c , φ^d . Ainsi une fonction quelconque φ_i sera définie par une expression analytique différente sur chacun des quatre sous domaines entourant le point S^i . Si l'espace V^h est de dimension trois nous sommes amenés à définir analytiquement huit fonctions.

III.5.2. Éléments à deux dimensions

Les sous-domaines définis par les maillages que nous avons utilisés dans le cas d'un problème à deux dimensions sont des quadrilatères. A chacun des éléments considérés nous associerons un repère tel que représenté sur la figure 17. Les fonctions φ associées au sous domaine sont alors définies par :

$$\begin{aligned}\varphi^a &= 1/4(1-r)(1-s) \\ \varphi^b &= 1/4(1+r)(1-s) \\ \varphi^c &= 1/4(1+r)(1+s) \\ \varphi^d &= 1/4(1-r)(1+s)\end{aligned}$$

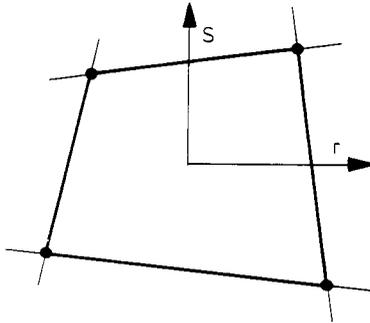


Figure 17. Repère associé à un élément à deux dimensions.

La construction de la matrice associée à notre problème nécessite le calcul des dérivées et des intégrales par rapport aux variables x et y des fonctions d'interpolation que nous venons de définir. Ces fonctions étant données dans le repère (r,s) , il est nécessaire d'introduire les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}$$

$$dx dy = |J| dr ds$$

où $|J|$ est le déterminant de J .

III.5.3. Éléments à trois dimensions

Le processus de calcul utilisé lorsque l'espace Ω est de dimension 3 est le même que celui décrit plus haut. A chaque sous domaine Ω^i est associé un repère tel que représenté sur la figure 18.

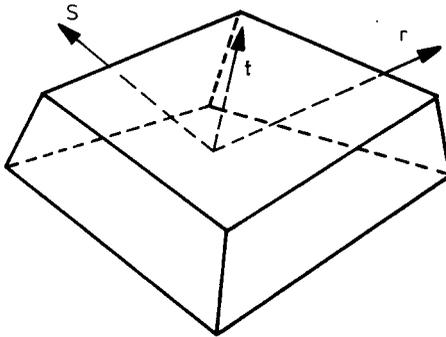


Figure 18. Repère associé à un élément à trois dimensions.

Les huit fonctions associées à chaque sous domaine Ω^i sont alors définies par :

$$\varphi^a = (1/8)(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$\varphi^b = (1/8)(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$\varphi^c = (1/8)(1-r)(1+s)(1-t)$$

$$\varphi^d = (1/8)(1+r)(1+s)(1-t)$$

$$\varphi^e = (1/8)(1-r)(1-s)(1+t)$$

$$\varphi^f = (1/8)(1+r)(1-s)(1+t)$$

$$\varphi^g = (1/8)(1-r)(1+s)(1+t)$$

$$\varphi^h = (1/8)(1+r)(1+s)(1+t)$$

L'évaluation des dérivées et des intégrales par rapport aux variables x , y et z des fonctions d'interpolation que nous venons de définir est effectuée en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$dx dy dz = |J| dr ds dt$$

III.6. ETUDE DE LA BASE φ^p DE V_p^h

Comme nous l'avons décrit au chapitre B paragraphe IV.4 les profils de vitesse à proximité des parois sont très abrupts et évoluent suivant des lois empiriques connues. Afin de mieux modéliser ces profils les fonctions constituant la base φ^p ont été construites à partir de la loi empirique de Reichardt énoncée au chapitre B paragraphe IV.4. Ainsi si l'on considère un espace Ω_p à deux dimensions nous obtenons, dans un repère où n représente la distance du point courant à la paroi, les fonctions de base suivantes :

$$\varphi^a = (1/4)(1-r)(1-B(s))$$

$$\varphi^b = (1/4)(1+r)(1-B(s))$$

$$\varphi^c = (1/4)(1+r)B(s)$$

$$\varphi^d = (1/4)(1-r)B(s)$$

avec :

$$B(n) = B_1(n)/B_2(n)$$

$$B_1(n) = (1/\chi)\ln[1+0,2\Delta\theta^+(1+n)] \\ + 7,8[1-\exp(-\Delta\theta^+(1+n)/22)-\Delta\theta^+(1+n)\exp(-0,165\Delta\theta^+(1+n)/22)]$$

$$B_2(n) = (1/\chi)\ln(1+0,4\Delta\theta^+) \\ + 7,8[1-\exp(-\Delta\theta^+/11)-\Delta\theta^+\exp(-0,33\Delta\theta^+)/11]$$

$$\Delta\theta^+ = \frac{\rho(c\mu^{1/2}k)^{1/2}\Delta}{\mu}$$

où Δ est l'épaisseur de l'élément perpendiculairement à la paroi et χ est la constante de Karman : 0,41.

Si l'on considère maintenant un espace Ω_p à trois dimensions nous obtenons, dans un repère où t représente la distance du point courant à la paroi, les fonctions de base suivantes :

$$\varphi^a = (1/8)(1-r)(1-s)(1-B(t))$$

$$\varphi^b = (1/8)(1+r)(1-s)(1-B(t))$$

$$\varphi^c = (1/8)(1-r)(1+s)(1-B(t))$$

$$\varphi^d = (1/8)(1+r)(1+s)(1-B(t))$$

$$\varphi^e = (1/8)(1-r)(1-s)B(t)$$

$$\varphi^f = (1/8)(1+r)(1-s)B(t)$$

$$\varphi^g = (1/8)(1-r)(1+s)B(t)$$

$$\varphi^h = (1/8)(1+r)(1+s)B(t)$$

L'évaluation des dérivées et des intégrales par rapport aux variables x , y et, éventuellement z , des fonctions d'interpolation que nous venons de définir est réalisée de la même façon que pour l'espace V_c^h .

IV. MÉTHODE DE RÉOLUTION

IV.1. INTRODUCTION

Nous allons maintenant décrire la technique employée pour résoudre les équations énoncées plus haut.

Nous décrivons d'abord la méthode itérative utilisée pour résoudre le système, puis nous présenterons la méthode de "streamline-upwinding" utilisée pour stabiliser le processus itératif.

IV.2. LA MÉTHODE DE RÉOLUTION

Dans l'exposé de la méthode de résolution nous noterons le système d'équations à résoudre de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & -C_3 & 0 & 0 \\ -C_1^t & -C_2^t & -C_3^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ P \\ K \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ 0 \\ \bar{F}_6 \\ \bar{F}_7 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ 0 \\ \bar{F}_6 \\ \bar{F}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - D_{12} U_2 - D_{13} U_3 \\ F_2 - D_{21} U_1 - D_{23} U_3 \\ F_3 - D_{31} U_1 - D_{32} U_2 \\ 0 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix}$$

soit de façon abrégée :

$$G(U) U = \bar{F}$$

La méthode de résolution que nous avons utilisée ne considère jamais le système $G U = F$ dans son ensemble. Elle pose successivement les équations relatives à chacun des degrés de liberté. En effet, la place mémoire nécessaire à poser le système (20) que nous devons résoudre dépasse de beaucoup les capacités des ordinateurs actuellement disponibles.

L'algorithme que nous avons utilisé peut s'écrire sous la forme :

Soit un point de départ des itérations donné $(U_1^0, U_2^0, U_3^0, P^0, K^0, E^0)$, tant que le critère de convergence n'est pas atteint faire :

Calculer la nouvelle valeur de la pression

$$\sum_j C_j^t (\bar{G}_j^{-1})^* C_j P^{i+1} = -\sum_j C_j^t (\bar{G}_j^{-1})^* [\bar{F}_j^* - \bar{G}_j^* U_j^i] - \sum_j C_j^t U_j^i$$

Résoudre l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe des x

$$G_1^* U_1^{i+1} = \bar{F}_1^* + C_1 P^{i+1}$$

Résoudre l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe des y

$$G_2^* U_2^{i+1} = \bar{F}_2^* + C_2 P^{i+1}$$

Résoudre l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe des z

$$G_3^* U_3^{i+1} = \bar{F}_3^* + C_3 P^{i+1}$$

Résoudre l'équation de transport de k

$$G_6^* K^{i+1} = \bar{F}_6^*$$

Résoudre l'équation de transport de e

$$G_7^* E^{i+1} = \bar{F}_7^*$$

Dans l'algorithme décrit ci-dessus les indices i et $i+1$ représentent respectivement les niveaux antérieur et ultérieur du calcul. D'autre part les exposants * représentent des expressions calculées avec les évaluations les plus récentes des variables. Les matrices \bar{G} sont obtenues à partir des matrices G à l'aide des expressions suivantes :

$$(\bar{G}_{k_{ii}}) = \sum_j |G_{k_{ij}}| \quad k=1, 2, 3$$

Les matrices \bar{G} sont diagonales.

Le critère de convergence que nous avons utilisé est donné par la relation suivante qui utilise la norme infinie :

$$\frac{\|U^i - U^{i-1}\|}{\|U^i\|} < 10^{-4}$$

Note 1 :

La méthode de résolution des équations citées ci-dessus, telles que $G_1^* U_1^{i+1} = \tilde{F}_1^* + C_1 P^{i+1}$, est la méthode d'élimination directe de Gauss.

Note 2 :

Afin de faire intervenir l'équation de conservation de matière dans le calcul de la pression, cette grandeur est obtenue au cours du processus itératif par résolution de l'équation déduite en ajoutant membre à membre les quatre premières équations du système $G U = F$ énoncé ci-dessus.

IV.3. LE "STREAMLINE-UPWINDING"

Il est admis que, dans un écoulement présentant un trop grand caractère convectif, il apparaît sur toutes les grandeurs associées à l'écoulement des oscillations numériques. Une solution à ce problème peut être d'augmenter le nombre de noeuds du maillage jusqu'à ce que les nombres de Reynolds associés à chaque élément soient de l'ordre de 1. Cette façon de faire conduirait à des maillages beaucoup trop denses. La solution que nous avons adoptée ici consiste à appliquer une méthode comparable à la technique classique du schéma décentré amont utilisé dans les méthodes aux volumes finis. Cette technique, qui consiste à évaluer la dérivée du terme convectif en amont de l'écoulement, est connue sous le nom de "Streamline-upwind" [BROOKS, 1982] [GRESHO, 1984].

Afin d'en décrire le formalisme nous allons considérer les termes de convection et de viscosité des équations de Navier-Stokes écrites dans un espace à une dimension :

$$U(U_{,x}) + \nu U_{,xx}$$

Remplaçons le facteur $U_{,x}$ par la valeur qu'il prend en amont de l'écoulement $U'_{,x}$. L'évaluation de ce dernier terme se fait à l'aide d'un développement limité d'ordre 1 nous permet d'écrire :

$$U(U_{,x} + \frac{h}{2} C^{te} U_{,xx}) + \nu U_{,xx}$$

où h est la dimension de l'élément.

La constante figurant dans cette équation nous permet de nous placer plus ou moins en amont de l'écoulement.

La relation ci-dessus peut être réécrite sous la forme :

$$U(U_{,x}) + (v + \frac{h}{2} U C^{te}) U_{,xx}$$

Ainsi, si l'on considère les équations de Navier-Stokes dans un espace à trois dimensions, l'application de la méthode de "Streamline-upwind" se concrétise par une transformation du terme $v\nabla^2 U$ en

$$\nabla \cdot [(vI + k^v) \cdot \nabla U]$$

où:

I est le tenseur unité,

$$K_{ij}^v = \frac{h^*}{2} \frac{U_i U_j}{|U|} \frac{1}{\sqrt{15}}$$

h^* est la moyenne entre la hauteur et la largeur de l'élément.

On remarque ici l'analogie entre les termes K^v et $\frac{h}{2} U C^{te}$ définis plus haut. Comme le tenseur K^v est proportionnel à $U_i U_j$, sa direction principale est celle de l'écoulement. La valeur $\frac{5}{\sqrt{15}}$ a été choisie car elle correspond à la plus faible valeur de la constante compatible avec la convergence de notre processus itératif. Tous les calculs réalisés dans le chapitre suivant ont utilisé cette valeur de la constante.

En suivant une approche physique nous pouvons conclure ce paragraphe en remarquant que la méthode de stabilisation des équations que nous venons de présenter revient à augmenter la viscosité numérique du fluide dans le sens des lignes de courant.

CHAPITRE D

Résultats

I. INTRODUCTION

Dans le chapitre B nous avons exposé la façon dont la mécanique des fluides permet de rendre compte d'un écoulement turbulent, le chapitre C décrit la méthode numérique utilisée pour obtenir une solution approchée des équations de Navier-Stokes associée au modèle $k-\epsilon$.

Nous allons maintenant montrer que l'application des techniques que nous venons de citer permet de simuler divers types d'écoulement.

Nous considérerons d'abord les cas classiques de l'écoulement dans un tube, et du jet dans un milieu infini qui ont été choisis afin d'évaluer le degré de fiabilité de notre méthode.

Nous étudierons ensuite le cas d'un écoulement réel simple : la cuve cylindrique munie d'un mobile axial, et enfin le comportement hydrodynamique des trois chenaux d'oxydation envisagés au chapitre A.

Dans chacun des cas que nous avons cité la qualité des résultats numériques a été évaluée par comparaison avec des données expérimentales.

II. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A L'INTÉRIEUR D'UN TUBE

II.1. INTRODUCTION

Nous allons étudier l'écoulement à l'intérieur d'un tube lisse afin de mieux appréhender les phénomènes intervenant au contact d'une paroi. La simplicité de la géométrie de ce problème ainsi que son axe de symétrie en font un cas très intéressant pour :

- comprendre comment le modèle $k-\epsilon$ prend en compte la présence d'une paroi,
- voir dans quelle mesure les résultats donnés par le logiciel de simulation correspondent aux résultats de diverses expériences menées et à la physique du phénomène.

Dans un premier temps, nous simulerons le dispositif utilisé par Laufer [LAUFER, 1954] [HINZE, 1959] et comparerons le résultat de notre calcul avec ceux de l'expérience menée par cet auteur. Puis, après avoir estimé le degré de fiabilité du logiciel dans ce cas, nous ferons une étude systématique de l'influence du diamètre de la tuyauterie, de la vitesse d'écoulement et de la viscosité du fluide, sur le profil de vitesse moyenne obtenu dans un tuyau. Les résultats de ces simulations seront comparés à l'expérience [BIRD, 1960] et une méthode d'évaluation de la viscosité turbulente sera donnée.

II.2. L'EXPÉRIENCE DE LAUFER

II.2.1. Introduction

Dès 1954 Laufer a mesuré les différentes grandeurs caractéristiques de la turbulence dans un tube. Depuis plusieurs auteurs ont refait ou complété ces mesures sans jamais les démentir.

Laufer a étudié l'écoulement dans un tube de cuivre sans soudure qui peut, par conséquent, être considéré comme lisse. Dans ce tube de 247 mm de diamètre et de 5 m de long, deux vitesses d'air ont été étudiées : 3 et 30 m/s. Ces essais correspondent respectivement à des nombres de Reynolds de 50 000 et 500 000. Dans le second cas les profils de vitesse ainsi que les grandeurs caractéristiques de la turbulence ont été mesurés jusque dans la sous-couche visqueuse.

II.2.2. Résultats expérimentaux

Seul le cas où le nombre de Reynolds vaut 500 000 sera envisagé ici. Dans ce cas le terme U^* caractéristique de l'écoulement près de la paroi est à peu près égal à $0,035 * U_{x,max}$ et le profil de vitesse moyenne mesuré par Laufer peut être lissé grâce aux relations suivantes :

$$y \in [0; 0,02 * D] , \quad \frac{U_x(y)}{U_{x,max}} = \left(\frac{2 * y}{D} \right)^{1/9}$$

$$y \in [0,02 * D; 0,31 * D] , \quad \frac{U_{x,max} - U_x(y)}{U^*} = - 2,44 * \ln \left(\frac{2 * y}{D} \right) + 0,8$$

$$y \in [0,31 * D; 0,50 * D] , \quad \frac{U_{x,max} - U_x(y)}{U^*} = - 3,36 * \ln \left(\frac{2 * y}{D} \right) - 0,46$$

où :

- U_x = vitesse axiale en un point de la section,
- y = distance à la paroi,
- D = diamètre du tube,
- $U_{x,max} = U_x(D/2)$.

Le profil de vitesse obtenu à l'aide de ces relations est représenté sur la figure 19.

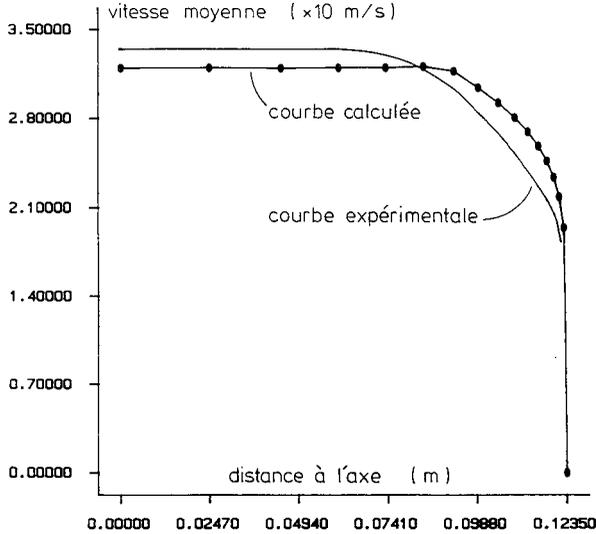


Figure 19. Vitesse moyenne exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas expérimental étudié par Laufer.

Outre le profil de vitesse moyenne, Laufer a mesuré plusieurs grandeurs caractéristiques de la turbulence. Le but que nous nous sommes fixé au début de ce chapitre est de voir comment le modèle $k-\epsilon$ prend en compte l'influence d'une paroi dans un écoulement turbulent. Nous nous intéresserons donc simplement aux grandeurs suivantes :

- champ d'énergie cinétique turbulente, k ,
- champ de viscosité turbulente, ν_t ,
- champ de dissipation due à la turbulence, ϵ .

En chaque point d'une section droite du tube, Laufer a mesuré les diverses composantes de la vitesse fluctuante. Ces résultats lui ont permis de déterminer les valeurs de k en tout point d'une section droite. Les valeurs ainsi trouvées sont reportées sur la courbe 20.

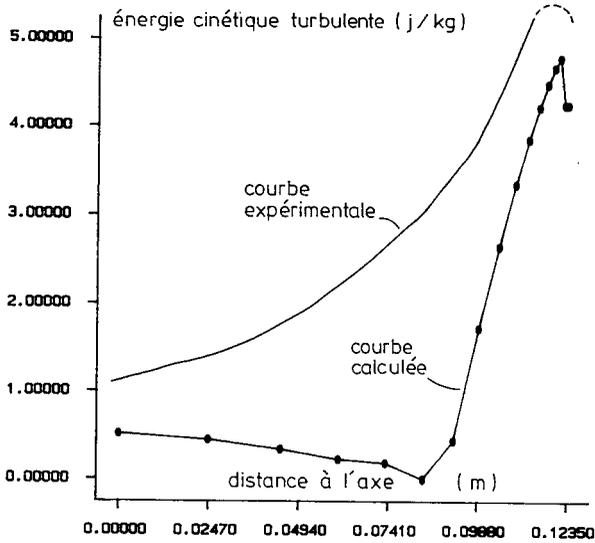


Figure 20. Energie cinétique turbulente exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas expérimental étudié par Laufer.

A partir du profil de vitesse moyenne qu'il a mesuré Laufer a déduit la valeur de la viscosité turbulente en chaque point d'une section droite de tuyauterie. Les résultats publiés sont donnés sur la figure 21. Remarquons ici que si cette méthode est bonne près des parois elle paraît moins valable au centre du tube car dans ces régions le gradient de vitesse moyenne est très faible.

A partir du champ d'énergie cinétique turbulente, et du champ de viscosité turbulente, il est possible de déterminer le champ de dissipation due à la turbulence. Pour ce faire il suffit d'appliquer la relation classique donnée par le modèle $k-\epsilon$: $\nu_t = c_\mu k^2/\epsilon$. On obtient alors la courbe représentée sur la figure 22.

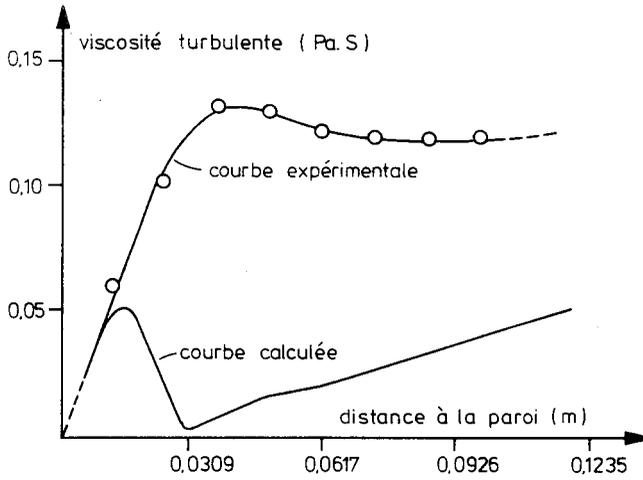


Figure 21. Viscosité turbulente exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas expérimental étudié par Laufer.

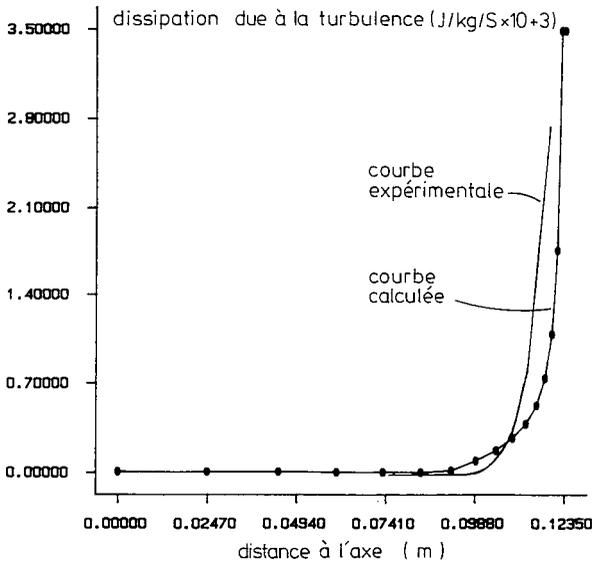


Figure 22. Dissipation due à la turbulence exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas expérimental étudié par Laufer.

II.2.3. Modélisation à l'aide du modèle k-ε

L'écoulement dans une tuyauterie de même géométrie que celle utilisée par Laufer a été modélisé à l'aide du modèle k-ε. Avant de présenter les résultats de nos calculs, nous allons nous intéresser à la physique du phénomène étudié afin de prévoir qualitativement les résultats que nous allons obtenir.

Lorsqu'un fluide s'écoule à l'intérieur d'une tuyauterie, la turbulence est générée par le gradient de vitesse au niveau de la paroi puis transportée vers le centre du tuyau par un phénomène comportant nécessairement des pertes. On observe donc, à proximité de la paroi, une augmentation de k. Plus loin, figure 20, k décroît vers une valeur limite atteinte au centre du tube.

On note également que l'échelle de longueur (définie page 53) associée à l'écoulement augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi. Ce phénomène traduit le fait que près de la paroi seuls de petits tourbillons peuvent se développer et qu'au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi, le développement de gros tourbillons est de moins en moins gêné par celle-ci. Dans des zones suffisamment éloignées de la paroi on constate que la taille des tourbillons n'évolue plus, la présence d'une paroi n'ayant alors plus d'influence sur ces derniers. L'évolution de l'échelle de longueur en fonction de la distance à la paroi généralement admise est donnée par la figure 13 (page 53)

Un résultat classique de la mécanique des fluides (paragraphe B.II.5.2) est d'exprimer ε par la relation: $\epsilon = k^{3/2}/\mathcal{L}$. On remarque alors que ε doit nécessairement diminuer au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi. En effet k diminue et \mathcal{L} augmente en fonction de la distance à la paroi.

On remarquera ici que les évolutions de k et de ε mesurées par Laufer correspondent bien à ce que la physique du phénomène laisse supposer.

Nous allons maintenant présenter la simulation que nous avons menée à l'aide du logiciel FIDAP.

Le problème a été traité en coordonnées cylindriques ce qui nous a permis de prendre en compte facilement les simplifications engendrées par la présence d'un axe de symétrie. Les conditions aux limites utilisées sont représentées

sur la figure 23. La prise en compte de la paroi constitue ici le point délicat du problème. Elle a été réalisée comme nous l'avons décrit au paragraphe B.IV.4 et au chapitre C.

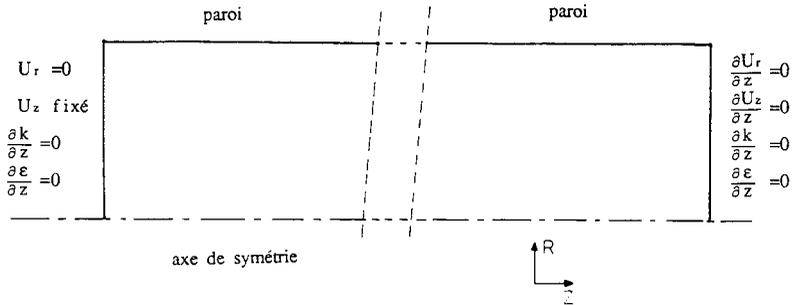


Figure 23. Conditions aux limites utilisées lors de la simulation de l'écoulement dans un tube.

Lors de la résolution de ce problème nous avons étudié l'influence du maillage et de la longueur de tuyauterie simulée sur le résultat final. Au cours de cette étude plusieurs types d'éléments ont été envisagés :

- triangle à trois noeuds,
- rectangle à quatre noeuds,
- rectangles à neuf noeuds.

Nous avons également fait varier la densité du maillage et testé des maillages mélangeant des éléments triangles et rectangles tel que représenté sur la figure 24. De tels mélanges permettent de faire évoluer la densité de noeuds en fonction des gradients des quantités à modéliser ou d'éventuelles difficultés de convergence.

Il est ressorti de cette étude que :

- une longueur de tuyau de 40 fois le diamètre est nécessaire à l'obtention d'un régime établi à partir d'un profil d'entrée uniforme vu les conditions aux limites en entrée du tuyau utilisées ici,

- le paramètre y^+ associé à l'épaisseur des éléments de paroi doit être de l'ordre de 30,
- un nombre suffisant de mailles sur l'axe du tuyau facilite la convergence.

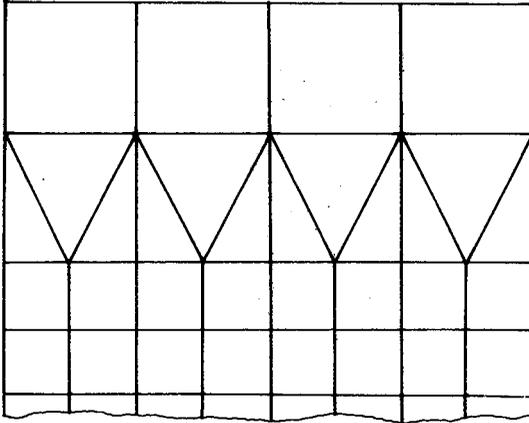


Figure 24. Exemple d'utilisation d'une couche d'élément triangle en vue de modifier la densité d'un maillage.

Moyennant ces conditions le maillage n'influence pas les profils calculés de vitesse et des grandeurs caractéristiques de la turbulence.

Nous avons réalisé la simulation, dont nous allons présenter les résultats, en considérant une longueur de tuyauterie de 20 m (soit 80 fois le diamètre) et un maillage réalisé à base d'éléments rectangulaires dont une partie est représentée sur la figure 25. Les résultats de ce calcul sont représentés sur les figures 19, 20, 21 et 22 qui montrent un bon accord entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales dans les cas du profil de vitesse. L'énergie cinétique turbulente est assez mal modélisée par le logiciel en notre possession associé au modèle k- ϵ . Remarquons toutefois que, comme il a été expliqué au début de ce paragraphe, k augmente dans une région très proche de la paroi ce qui a été effectivement constaté expérimentalement. La viscosité turbulente quant à elle, est bien modélisée près de la paroi mais ailleurs un écart apparaît entre le résultat de nos calculs et ceux énoncés

par Laufer. Les profils expérimentaux et théoriques de ϵ bien que qualitativement semblables indiquent des écarts quantitatifs non négligeables.

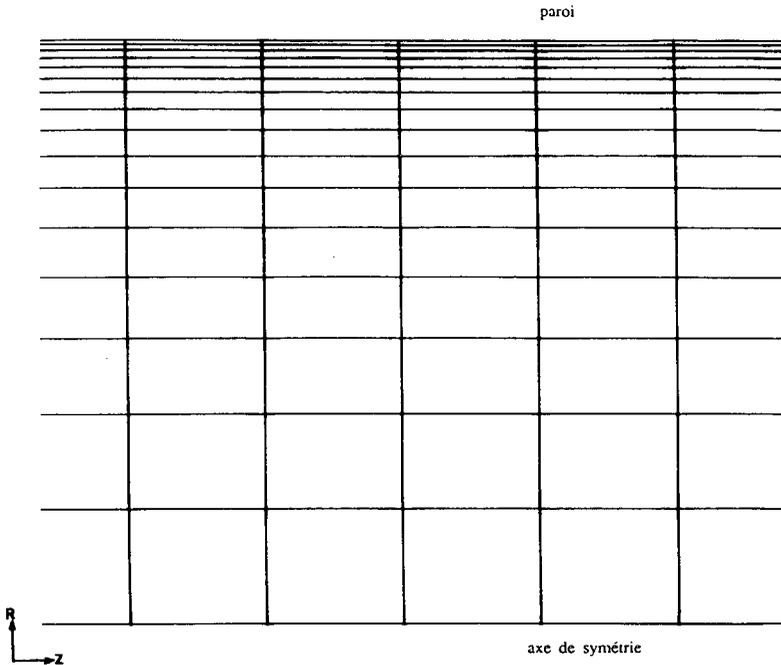


Figure 25. Portion du maillage utilisé lors de l'étude du cas expérimental étudié par Laufer.

II.2.4. Conclusion

Nos calculs nous ont permis d'obtenir de bonnes valeurs de la viscosité turbulente de l'écoulement à proximité des parois, ainsi que des profils de vitesse moyenne corrects sur toute la section du tuyau. Les profils d'énergie cinétique turbulente et de dissipation due à la turbulence que nous avons obtenus, s'ils sont qualitativement en accord avec l'expérience, sont quantitativement assez loin des valeurs couramment admises.

II.3. ETUDE SYSTÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT DANS UN TUBE

II.3.1. Introduction

Le paragraphe précédent nous a permis de vérifier que le logiciel de simulation à notre disposition permet d'obtenir un bon profil de vitesse dans le cas du dispositif expérimental étudié par Laufer. Nous allons maintenant pousser plus loin l'étude de ce type de problèmes en faisant varier la viscosité du fluide, le diamètre de la tuyauterie et le nombre de Reynolds de l'écoulement. Pour chaque triplet de ces paramètres nous réaliserons deux opérations :

- Détermination numérique des profils de vitesse moyenne et de pression à l'aide du modèle k- ϵ , puis comparaison avec les profils mesurés.
- Simulation de l'écoulement dans le cas où la viscosité turbulente est estimée près des parois à l'aide de la relation de van Driest (paragraphe B.IV.4.2) tout en étant prise constante dans le reste du domaine. Puis recherche de la valeur à donner à la constante pour que le profil de vitesse moyenne se rapproche le plus possible de celui donné par le modèle k- ϵ .

II.3.2. Modélisation à l'aide du modèle k- ϵ

Nous avons considéré deux fluides : de l'eau et de l'air. Pour chacun de ces deux fluides, nous avons envisagé dix tuyauteries de rayon respectif : 0,05 ; 0,15 ; 0,25 ; 0,50 ; 0,75 ; 1,0 ; 2,0 ; 3,0 ; 4,0 ; 5,0 mètres. Dans chacun de ces cas nous avons étudié quatre valeurs du nombre de Reynolds qui sont : 10^4 , 10^5 , 10^6 , 10^7 . Nous avons simulé tous les cas que nous venons de décrire à l'aide du modèle k- ϵ .

La validité des résultats que nous avons obtenus lors de la simulation de l'expérience de Laufer nous permet de penser que nos calculs ont donné de bons profils de vitesse moyenne. De plus, pour chacun des cas testés ici nous avons recalculé le profil de vitesse moyenne à l'aide de relations empiriques [BIRD, 1960]. Les résultats de ces calculs et de nos simulations sont en bon accord (figures 26 à 29).

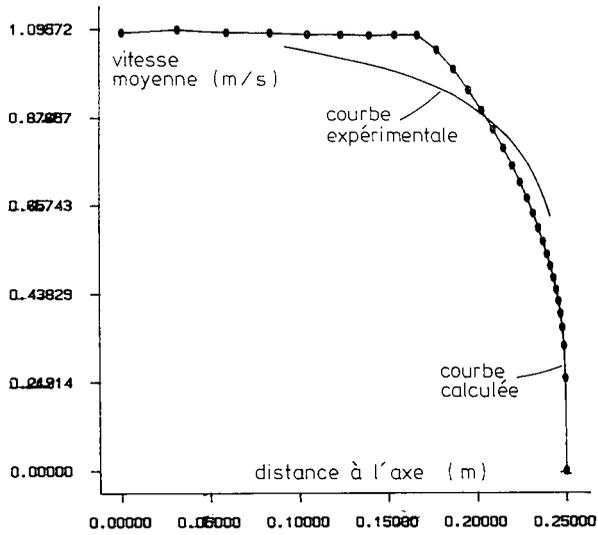


Figure 26. Vitesse moyenne exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas d'un tube lisse de diamètre 0,5 m dans lequel de l'air s'écoule à 0,92m/s.

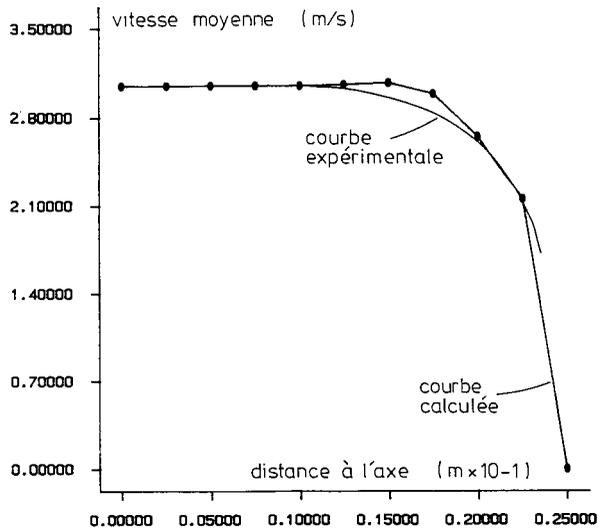


Figure 27. Vitesse moyenne exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas d'un tube lisse de diamètre 0,05 m dans lequel de l'air s'écoule à 2,8m/s.

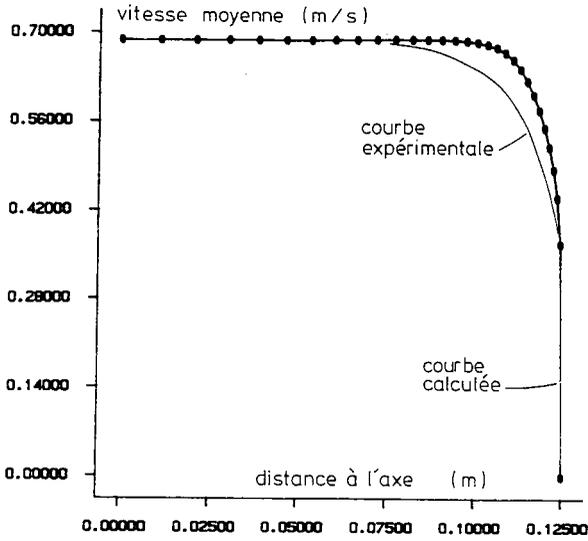


Figure 28. Vitesse moyenne exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas d'un tube lisse de diamètre 0,25m dans lequel de l'eau s'écoule à 0,66m/s.

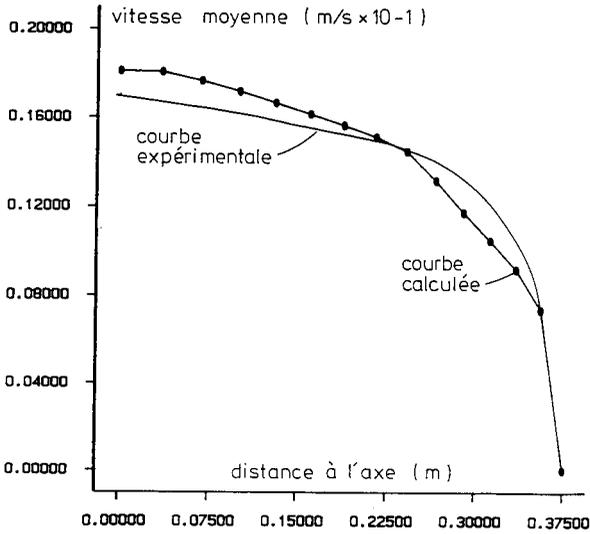


Figure 29. Vitesse moyenne exprimée en fonction de la distance à l'axe dans le cas d'un tube lisse de diamètre 0,75 m dans lequel de l'eau s'écoule à 0,013 m/s.

Pour chacun des cas étudiés nous avons également évalué, à partir de la perte de charge issue de la résolution des équations de Navier-Stokes, la valeur du rapport $\frac{\Delta P}{\rho V^2} \frac{D}{L}$. Un exemple des résultats obtenu est donné dans le tableau 6. Notre calcul nous a montré que ce rapport est bien égal au facteur de Moody. Nous pouvons donc dire que le logiciel en notre possession est capable de calculer correctement les pertes de charge dues au frottement du fluide contre une paroi lisse.

D m	ρ kg/m ³	V m/s	$\frac{\Delta P}{\rho V^2} \frac{D}{L}$	f
0,50	1,3	0,92	0,010	0,011
0,05	1,3	2,80	0,016	0,014
0,25	1000	0,66	0,009	0,008
0,75	1000	0,013	0,015	0,015

Tableau 6. Comparaison entre les valeurs du rapport $\frac{\Delta P}{\rho V^2} \frac{D}{L}$ issue de la résolution des équations de Navier-Stokes et le facteur de Moody.

De plus les profils de viscosité turbulente que nous avons calculés ne dépendent que du nombre de Reynolds associé à l'écoulement, comme il est couramment admis. Cette propriété ne doit toutefois pas faire oublier l'écart entre les profils calculés et expérimentaux de la viscosité turbulente loin de la paroi obtenus lors de l'étude de l'expérience de Laufer.

II.3.3. Modélisation grâce à une viscosité turbulente constante

Dans cette série de calculs nous avons repris les résultats obtenus précédemment à l'aide du modèle k-ε et nous avons cherché la valeur qu'il faut donner à ν_t pour que, dans le cas où l'on modélise la viscosité turbulente par la relation de van Driest près des parois et par une constante égale à ν_t dans le reste du domaine, le profil de vitesse moyenne obtenu se rapproche le plus possible, au sens des moindres carrés, de celui donné par le modèle k-ε.

Les résultats de ces calculs, représentés sur le tableau 7 et sur la figure 30, montrent que la valeur de la viscosité turbulente cherchée peut être obtenue grâce à la relation empirique suivante :

$$(21) \Leftrightarrow \nu_t = 2,7 \cdot 10^{-5} R_e^{0,26} \text{ m}^2/\text{s}$$

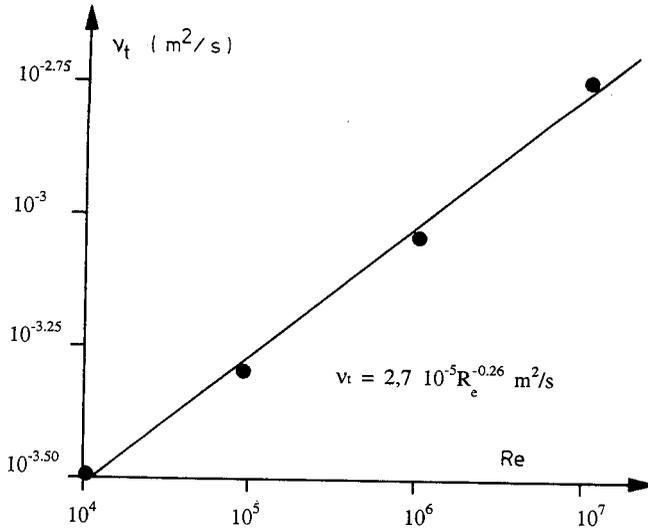


Figure 30. Valeur donnée à la viscosité turbulente en fonction du nombre de Reynolds.

	Re			
	10^4	10^5	10^6	10^7
0.05	0.2	0.6	1.0	
0.15	0.2	0.4	0.7	
0.25	0.2	0.6	0.8	
0.50	0.4	0.4	0.8	
0.75	0.4	0.4	0.9	1.8
1.00	0.4	0.3	0.9	1.8
2.00	0.4	0.4	1.0	1.8
3.00	0.2	0.4	1.0	1.8
4.00	0.3	0.6	1.0	1.7
5.00	0.5	0.7	1.0	1.9
moyenne	0.32	0.50	0.91	1.8
formule	0.3	0.54	0.88	1.7

Tableau 7. Valeur donnée en $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ à la viscosité turbulente en fonction du diamètre du tube et du nombre de Reynolds associé à l'écoulement.

On remarquera que conformément à la signification physique de la viscosité turbulente celle-ci ne dépend que de la nature de l'écoulement.

II.3.4. Conclusion

La simulation à l'aide du modèle k-ε nous a donné des pertes de charge et des profils de vitesse moyenne corrects pour des tubes lisses de diamètres 0,05 à 5 mètres et des nombres de Reynolds allant de 10^4 à 10^7 . Dans le cas où la turbulence est modélisée à l'aide de la relation de van Driest près des parois et par une viscosité turbulente constante, et égale à ν_t , dans le reste du domaine, la relation (21) permet d'obtenir le profil de vitesse qui se rapproche le plus de celui obtenu à l'aide du modèle k-ε. Les écarts entre les résultats obtenus par le modèle à viscosité turbulente constante et ceux issus de l'application du modèle k-ε sont trop importants pour pouvoir justifier les simplifications introduites.

III. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT DE JET DANS UN MILIEU INFINI

III.1. INTRODUCTION

Nous allons maintenant tester le comportement du logiciel de simulation en notre possession dans le cas d'un écoulement de jet libre. Pour ce faire nous allons considérer le cas expérimental étudié par Wygnanski et Fiedler [WYGNANSKI, 1970] [HINZE, 1959]. Après un bref exposé des résultats expérimentaux obtenus par ces auteurs nous présenterons le résultat de la simulation que nous avons menée sur ce cas.

III.2. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Dans leur expérience Wygnanski et Fiedler ont considéré un jet d'air de 26 mm de diamètre dans lequel la vitesse de sortie est de 51 m/s. Les notations que nous avons utilisées ainsi que l'évolution du champ de vitesse à proximité de l'origine du jet sont données sur la figure 31.

La vitesse d'écoulement de l'air sur l'axe du jet est d'abord constante jusqu'à une distance $Z_c = 5,9D$ de l'orifice puis elle décroît en suivant une loi de la forme :

$$\frac{U_{z, \max}}{\bar{U}} = \frac{A * D}{a + z} \quad 10 < (z+a)/D < 90$$

- où D = diamètre du jet,
 z = distance à l'orifice,
 \bar{U} = vitesse moyenne en sortie de jet,
 $U_{z,max}$ = vitesse moyenne sur l'axe,
 A, a = constantes définies ultérieurement.

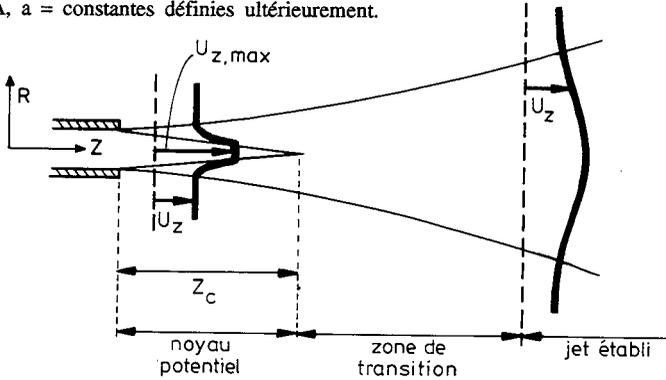


Figure 31. Notations utilisées lors de l'étude du jet dans un milieu infini.

Wyganski et Fiedler ont également mesuré les profils de vitesse sur plusieurs sections perpendiculaires à l'axe du jet. Ils ont modélisé les courbes ainsi obtenues grâce aux relations suivantes :

$$\frac{U_z}{U_{z,max}} = \exp(-108\xi^2)$$

$$\xi = \frac{r}{z+a}$$

$$8 < (z+a)/D < 20$$

- Où r = distance à l'axe,
 U_z = vitesse moyenne d'écoulement en un point.

Les valeurs de A et a évoluent avec la distance de l'orifice suivant les relations :

$10 < (z+a)/D < 50$	$a = -3D$	$A = 5,9$
$25 < (z+a)/D < 90$	$a = -7D$	$A = 5,4$

Afin de caractériser ces profils de vitesse nous allons introduire la grandeur notée $r_{1/2}$ qui, pour une valeur de z donnée, est la valeur du rayon pour laquelle la vitesse d'écoulement est égale à la moitié de celle obtenue sur l'axe. A $r_{1/2}$ est associé le terme adimensionnel $\xi_{1/2}$ défini par :

$$\xi_{1/2} = \frac{r_{1/2}}{z+a}$$

D'après les relations expérimentales énoncées ci-dessus $\xi_{1/2}$ est une constante et vaut 0,08.

A partir du champ de vitesse mesuré, il est possible de montrer que la viscosité turbulente peut être évaluée grâce à la relation [HINZE, 1959] :

$$\nu_t = 0,0116 \bar{U} D$$

$$8 < (z+a)/D < 20$$

D'autres résultats expérimentaux obtenus par Wygnanski et Fiedler nous permettent de déterminer le profil d'énergie cinétique turbulente k représenté sur la figure 32.

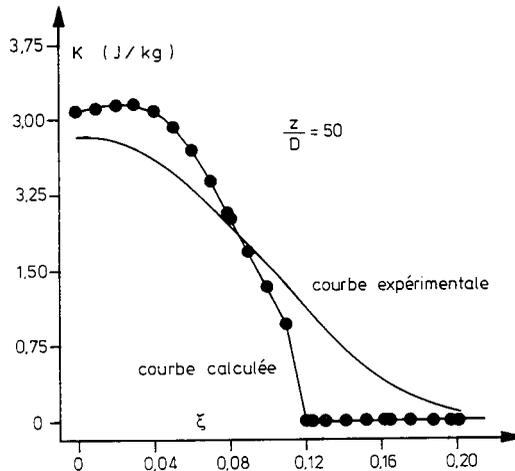


Figure 32. Comparaison entre les profils simulés et mesurés de l'énergie cinétique turbulente.

III.3. MODÉLISATION à L'AIDE DU MODELE k- ϵ

Nous avons simulé à l'aide du modèle k- ϵ un cas semblable à celui étudié par Wagnowski et Fiedler. Ce problème, qui possède un axe de symétrie, a été traité en coordonnées cylindriques.

Dans ce paragraphe nous décrivons le maillage puis les conditions aux limites utilisées lors de cette modélisation et enfin l'influence de la densité du maillage et de la taille du domaine sur les résultats numériques. L'énoncé des résultats numériques obtenus et leurs comparaisons aux résultats expérimentaux figurera en fin du paragraphe.

Le maillage utilisé lors de la simulation de ce jet est représenté sur la figure 33.

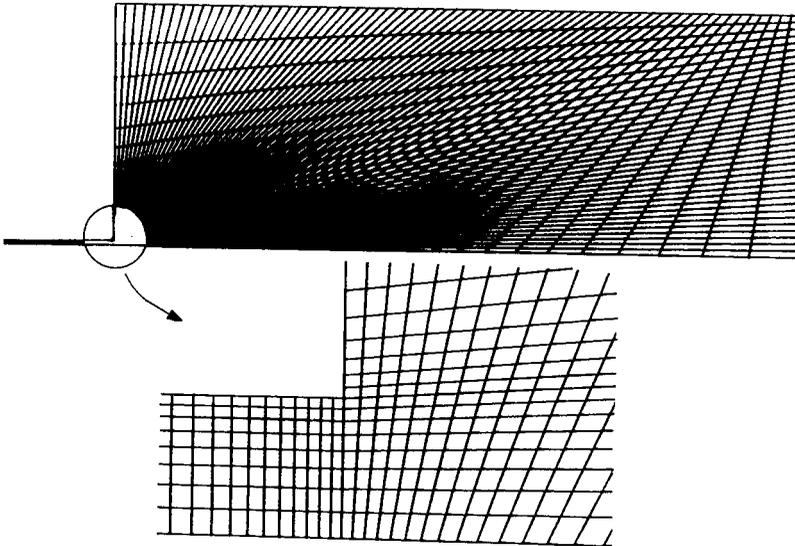


Figure 33. Maillage utilisé lors de la simulation du jet.

On remarquera que nous avons réalisé le calcul non seulement sur le domaine où le jet se développe mais aussi à l'intérieur du tube qui l'alimente. Cette façon de faire nous permet d'obtenir un profil de vitesse et un champ de turbulence établis dès la sortie du tuyau d'alimentation. En effet le champ de turbulence et le profil de vitesse donnés en tant que conditions

aux limites à l'entrée de ce tuyau ont vite fait, en se rapprochant du point de sortie, de prendre une valeur proche de celle que l'on l'observerait dans un régime établi. Une fois la sortie du tuyau d'alimentation atteinte le jet peut se développer à partir du profil de vitesse et du champ de turbulence ainsi calculés. Comme le montrent les figures 34 et 35 la turbulence du jet est essentiellement générée au point de sortie du tuyau si bien que les erreurs dans la modélisation de k , ϵ et v_t que nous avons constatées lors de l'étude de l'écoulement dans un tube ne devraient pas modifier le résultat de notre modélisation de façon significative.

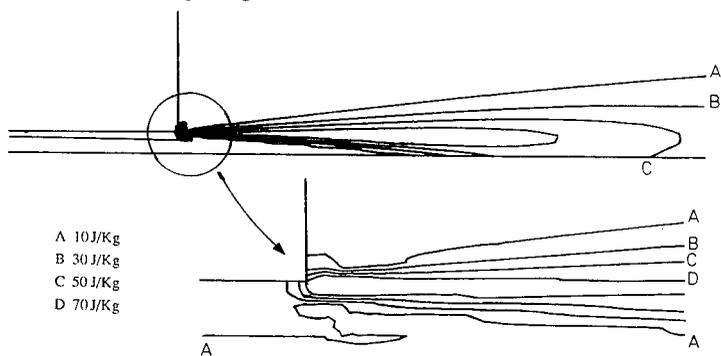


Figure 34. Champ simulé d'énergie cinétique turbulente dans le cas d'un jet en milieu infini.

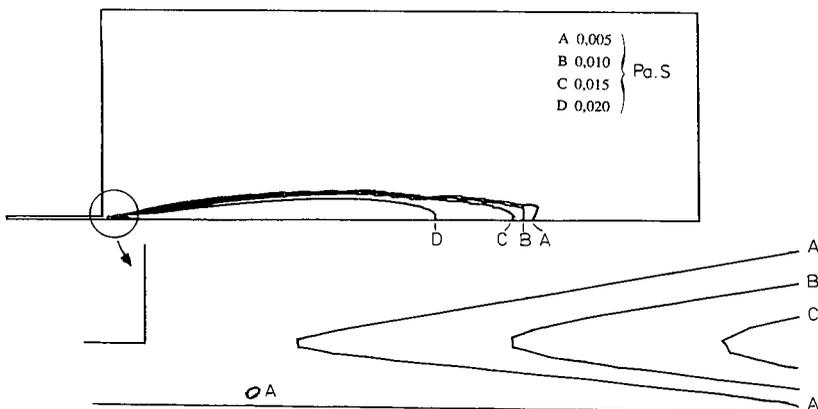


Figure 35. Champ simulé de viscosité turbulente dans le cas d'un jet en milieu infini.

Les conditions aux limites utilisées lors de la simulation de ce jet sont données sur la figure 36. L'entrée du tuyau, les parois et l'axe de symétrie ont été modélisés par les mêmes conditions aux limites que celles utilisées au paragraphe D.II. Des conditions aux limites d'entrée et de sortie libre de fluide ont été testées sur les sections S_1 et S_2 (figure 36). Les résultats obtenus dans ces conditions ne sont pas conformes à l'expérience: les valeurs de $\xi_{1/2}$ sont trop faibles et la vitesse d'écoulement sur l'axe tend vers une limite de 17 m/s en s'éloignant de l'origine du jet. Nous avons donc pris, dans ce qui suit, des conditions aux limites d'entrée libre de fluide sur la surface S_2 et imposé la valeur de la vitesse obtenue expérimentalement sur la surface S_1 .

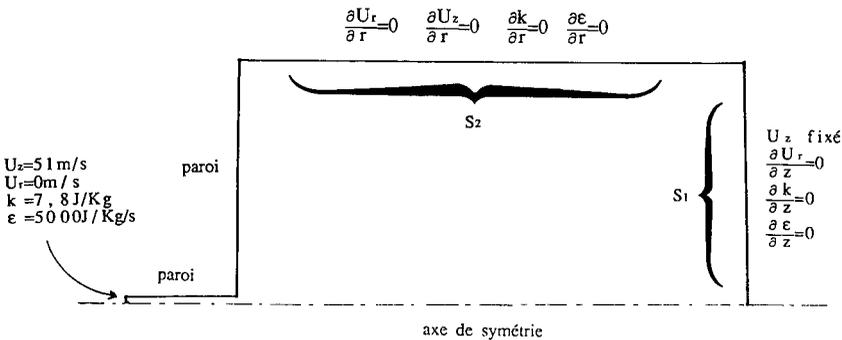


Figure 36. Conditions aux limites utilisées lors de la simulation du jet dans un milieu infini.

Les critères de densité du maillage que nous avons employés ici sont les mêmes que pour le tuyau: épaisseur des mailles proches des parois de l'ordre de grandeur de la couche limite, densité du maillage suffisante pour assurer une bonne convergence dans les milieux fluides à faible gradient de vitesse. Nous avons également réalisé plusieurs simulations du jet en faisant varier les dimensions du domaine dans lequel l'évolution du jet libre est calculée. Il est ressorti de ces essais que les dimensions du domaine n'influencent pas le résultat de façon sensible dans la mesure où nous imposons sur la section S_1 le profil de vitesse obtenu expérimentalement.

L'évolution des vitesses calculées et mesurées le long de l'axe du jet est donnée sur la figures 37. On note sur cette figure que la vitesse sur l'axe du jet est bien modélisée quelle que soit la distance à l'orifice.

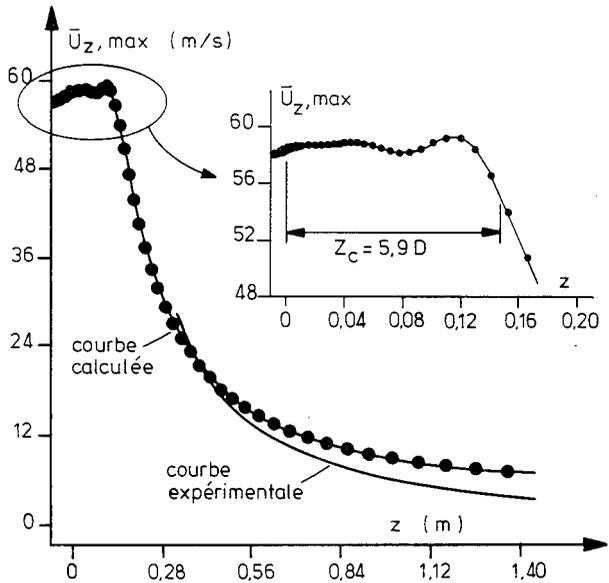


Figure 37. Vitesse moyenne prise sur l'axe du jet en fonction de la distance à l'orifice

La figure 38 représente, elle, l'évolution de la vitesse suivant une droite perpendiculaire à l'axe du jet et située plus ou moins loin de l'orifice. A partir de courbe de ce type nous avons déduit les valeurs du paramètre $\xi_{1/2}$ données dans le tableau ci-dessous:

z (m)	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40
$\xi_{1/2}$	0,11	0,10	0,10	0,10	0,11	0,09

Comme nous l'avons dit lors de la présentation des résultats expérimentaux, le terme $\xi_{1/2}$ est une constante égale à 0,08. On remarque que les valeurs données dans ce tableau sont assez proches de celles suggérées par l'expérience. Ceci montre que l'épanouissement du jet est bien prédit.

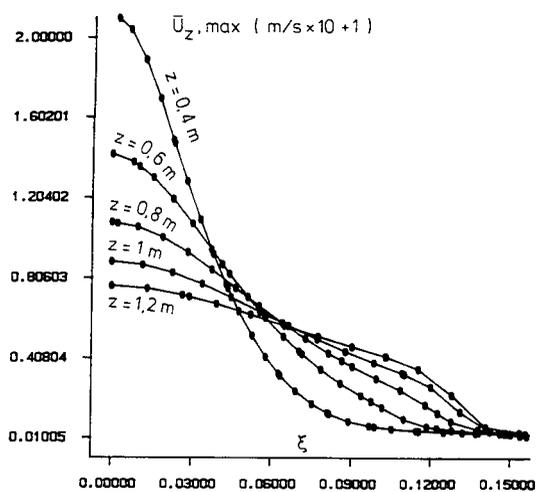


Figure 38. Profil simulés de vitesses moyennes à différentes distances à l'orifice.

L'évolution des viscosités turbulentes simulées et mesurées, est représentée sur la figure 39.

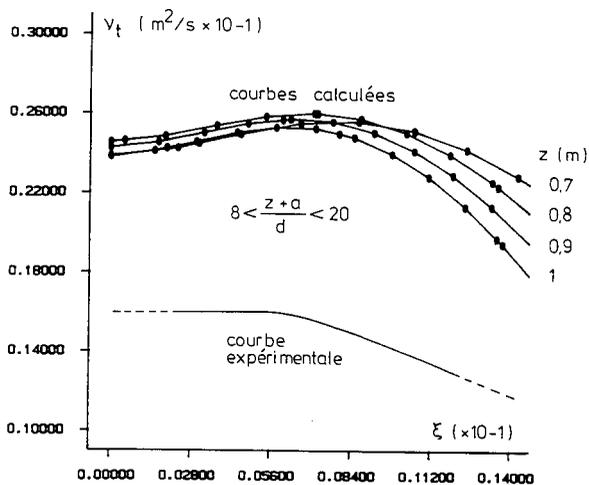


Figure 39. Comparaison entre les profils simulés et mesurés de viscosité turbulente à différentes distances de l'orifice.

Nous pouvons constater un bon accord qualitatif dans l'évolution de ces courbes même si, quantitativement les valeurs obtenues sont assez différentes.

Les courbes simulées et mesurées représentant l'évolution de l'énergie cinétique turbulente sont données sur la figure 32 (page 103). Le profil expérimental présente des variations moins rapides que le profil théorique. Les deux courbes représentent toutefois des quantités du même ordre de grandeur.

En conclusion des deux paragraphes ci-dessus nous pouvons dire que les simulations que nous avons réalisées nous permettent d'évaluer les caractéristiques générales du champ de turbulence en sortie du jet mais ne nous en donnent pas la valeur exacte.

III.4. CONCLUSION

Après avoir simulé le cas du jet dans un milieu infini, nous avons obtenu des résultats en bon accord avec l'expérience en ce qui concerne le champ de vitesse. Le champ de turbulence obtenu ne reflète que les caractéristiques générales du champ expérimental.

IV. LA CUVE CYLINDRIQUE AGITÉE PAR UN MOBILE AXIAL

IV.1. INTRODUCTION

Le chapitre précédent était consacré à la modélisation du jet dans un milieu infini. Nous allons maintenant nous intéresser à un écoulement de jet dans un milieu confiné. Pour ce faire nous considérerons les mouvements de fluide engendrés par un mobile axial dans une cuve cylindrique et assimilerons l'action du mobile à celle d'un jet comme annoncé au paragraphe B.IV.6. L'hélice sera alors caractérisée par son nombre de pompage N_{qp} et son diamètre.

Ce système de cuve agitée étant utilisé de façon courante pour réaliser l'opération unitaire de mélangeage, l'évolution des paramètres globaux (tel que le débit de circulation) caractérisant son régime hydrodynamique est bien connu [BRUXELMANE, 1976]. Des mesures de profils de vitesse moyenne réalisées

par anémométrie laser sur des cuves de géométrie standard ont permis de localiser l'emplacement de l'oeil de circulation [FORT, 1989].

L'étude que nous présentons ici a été réalisée sur trois systèmes cuve-agitateur de dimensions différentes. Les deux premiers ont des dimensions standard, le troisième est disponible dans notre laboratoire. Dans chacun de ces trois cas nous avons obtenu numériquement les champs de vitesse, de pression et de turbulence. A partir de ces données nous avons déduit la position de l'oeil de circulation et la valeur du débit de circulation. Ces résultats ont ensuite été comparés avec l'expérience.

IV.2. LES DIFFÉRENTES GÉOMÉTRIES DE CUVE ÉTUDIÉES

Les cuves 1 et 2, ont un diamètre et une hauteur de 1 mètre. Les mobiles d'agitation dont elles sont munies, sont respectivement situés à 33 et 50 centimètres du fond. Nous avons donc ici des cuves de géométrie standard dont les profils d'écoulements et les débits de circulations peuvent être trouvés simplement dans la littérature [FORT, 1989] [BRUXELMANE, 1976].

La dernière de ces trois cuves, dont les dimensions sont reportées sur la figure 40, est disponible dans notre laboratoire ce qui nous permet d'étudier facilement les divers régimes hydrodynamiques caractéristiques de son fonctionnement.

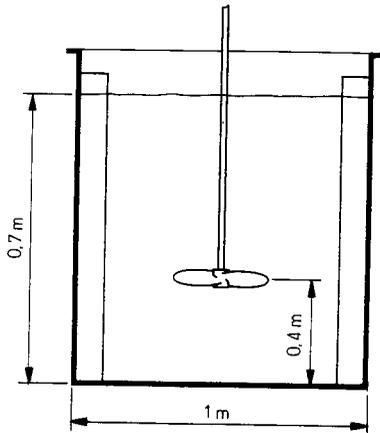


Figure 40. Dimensions de la cuve 3.

IV.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES OBTENUS POUR LES DIFFÉRENTES CUVES

IV.3.1. Introduction - Méthodes numériques

Pour chacune des trois cuves étudiées nous avons testé quatre valeurs du diamètre du jet ainsi que plusieurs vitesses en sortie de jet.

Pour chacune de ces configurations nous avons calculé les champs de vitesse, de pression et de turbulence. La représentation des lignes de courant déduites du champ de vitesse (telle que celle donnée sur la figure 41) nous permet de mesurer la hauteur de l'oeil de circulation de l'écoulement. Nous pouvons alors tracer l'évolution de la vitesse axiale suivant un rayon situé à cette hauteur. La courbe ainsi obtenue nous permet, par simple intégration, d'obtenir le débit de circulation associé à l'écoulement étudié.

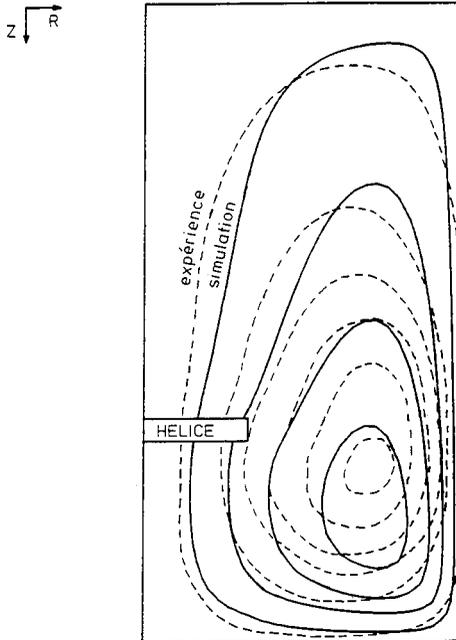


Figure 41. Lignes de courant expérimentales et simulées dans une cuve agitée.

Le résultat de ce calcul a été comparé, dans le cas des cuves 1 et 2, aux valeurs données dans la littérature. Les lignes de courant simulées dans le cas de la cuve 1 ont été comparées à l'expérience.

La modélisation de l'écoulement a été menée en coordonnées cylindriques afin de tenir compte de l'axe de symétrie caractéristique du problème. Les conditions aux limites utilisées pour modéliser le jet, la surface libre ainsi que les parois sont celles présentées dans le chapitre B.IV. Elles ont été retranscrites de façon explicite sur la figure 42.

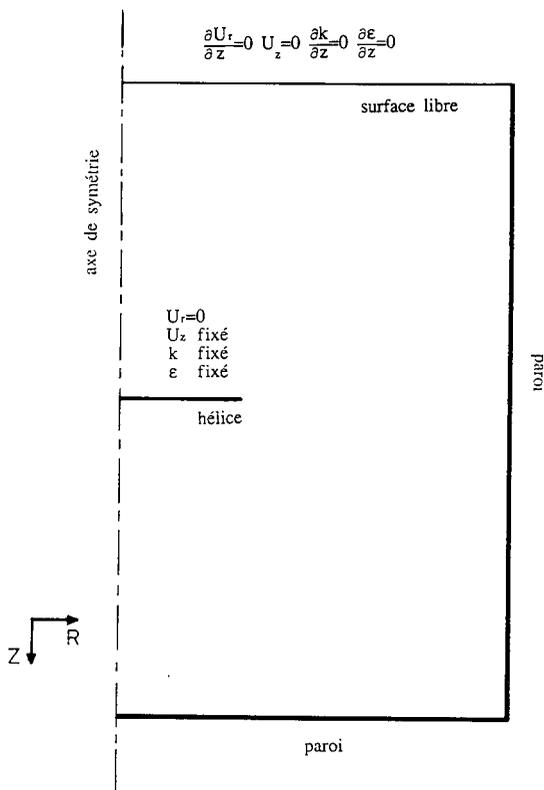


Figure 42. Conditions aux limites utilisées lors de la simulation de la cuve cylindrique agitée.

IV.3.2. Cuve 1

La cuve 1 est une cuve de géométrie standard dans laquelle l'hélice est placée à 33 cm du fond. Le champ de vitesse engendré par le mobile axial dans cette cuve a été calculé pour plusieurs diamètres de jet et pour des vitesses en sortie de jet de 0,5 ; 1,0 ; 1,5 et 2,0 m/s.

Un exemple de maillage utilisé pour modéliser la cuve 1 est représenté sur la figure 43.

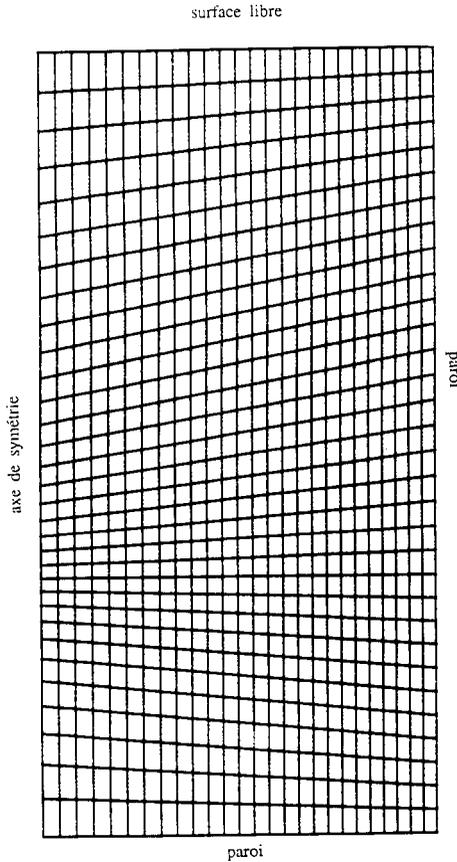


Figure 43. Exemple de maillage utilisé pour la simulation de l'écoulement dans une cuve agitée cylindrique.

L'allure générale de ce maillage ainsi que les rapports de forme des divers éléments qui le composent nous ont été suggérés par l'expérience que nous avons acquise lors des simulations du jet et du tube. Les figures 44 à 48 montrent les résultats obtenus après avoir résolu les équations de Navier-Stokes associées au modèle de turbulence k-ε dans le cas d'une hélice de diamètre 33 cm et d'une vitesse en sortie de jet de 1,5 m/s.

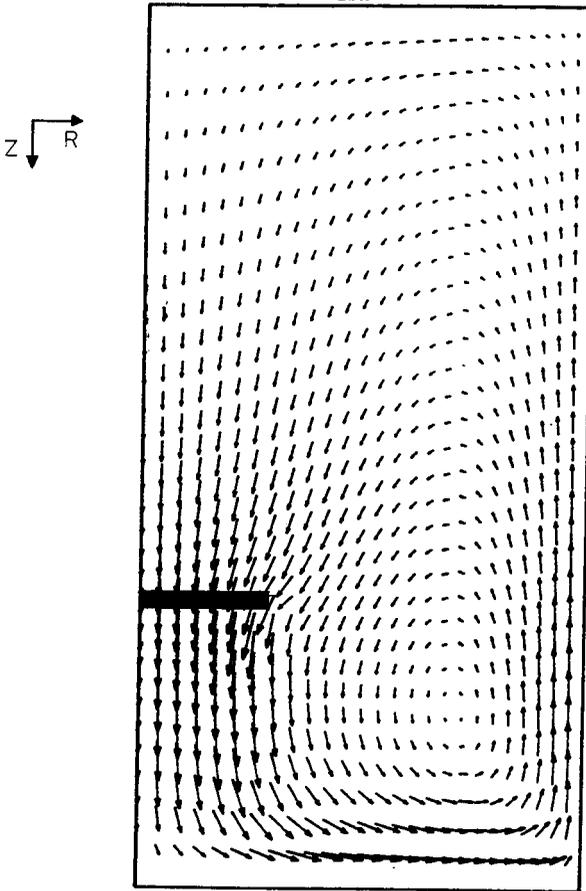


Figure 44. Champ de vitesse obtenu lors de la simulation de l'écoulement dans une cuve agitée cylindrique.



Pa.
A - 800
B - 300
C 100
D 400

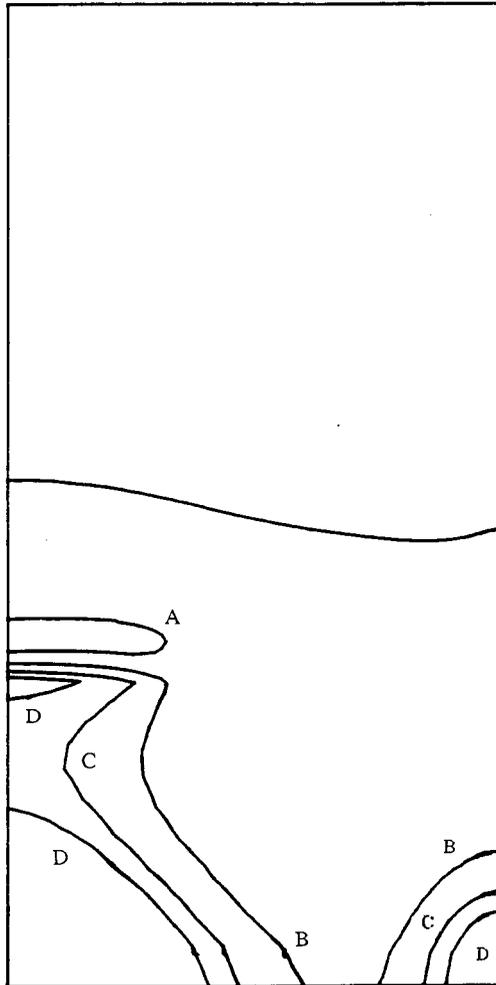


Figure 45. Champ de pression obtenu lors de la simulation de l'écoulement dans une cuve agitée cylindrique.

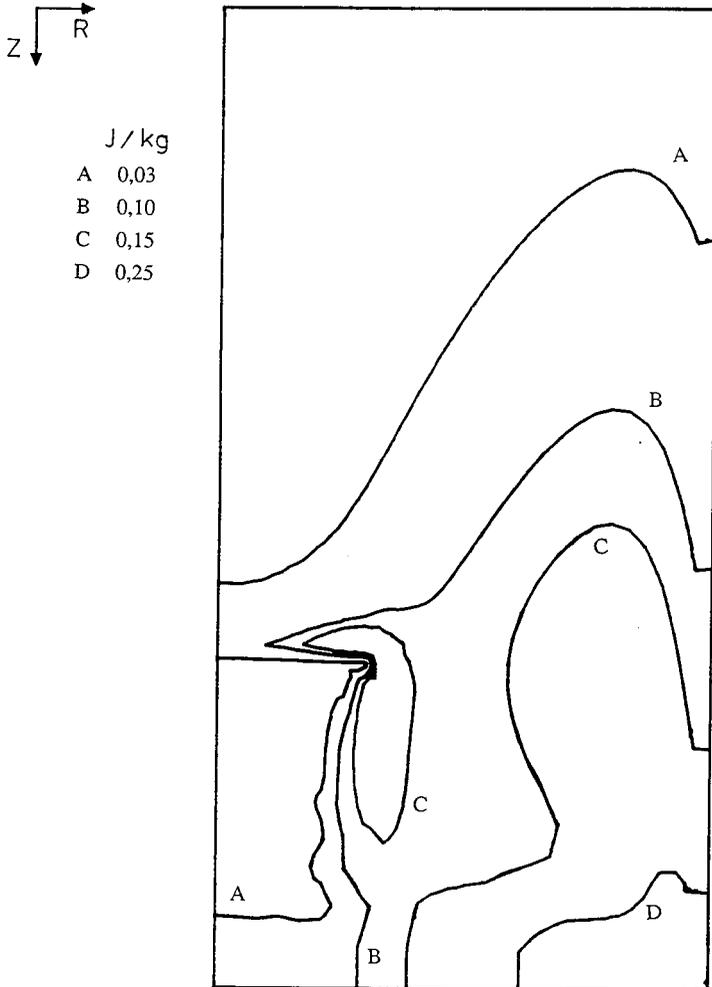


Figure 46. Champ d'énergie cinétique turbulente obtenu lors de la simulation de l'écoulement dans une cuve agitée cylindrique.

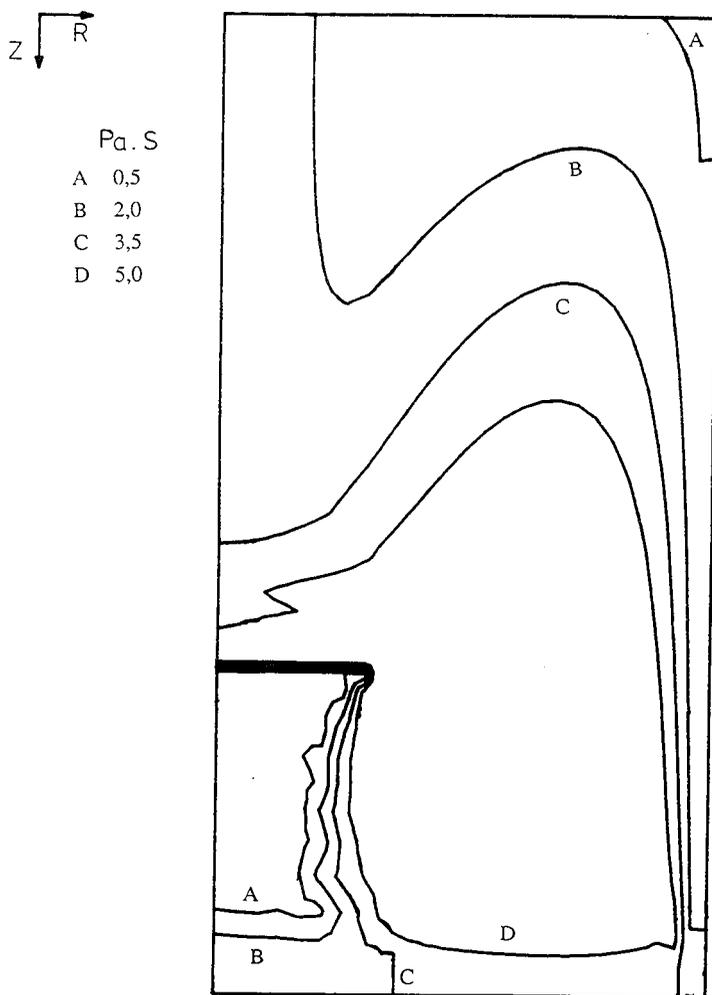


Figure 47. Champ de viscosité turbulente obtenu lors de la simulation de l'écoulement dans une cuve agitée cylindrique.

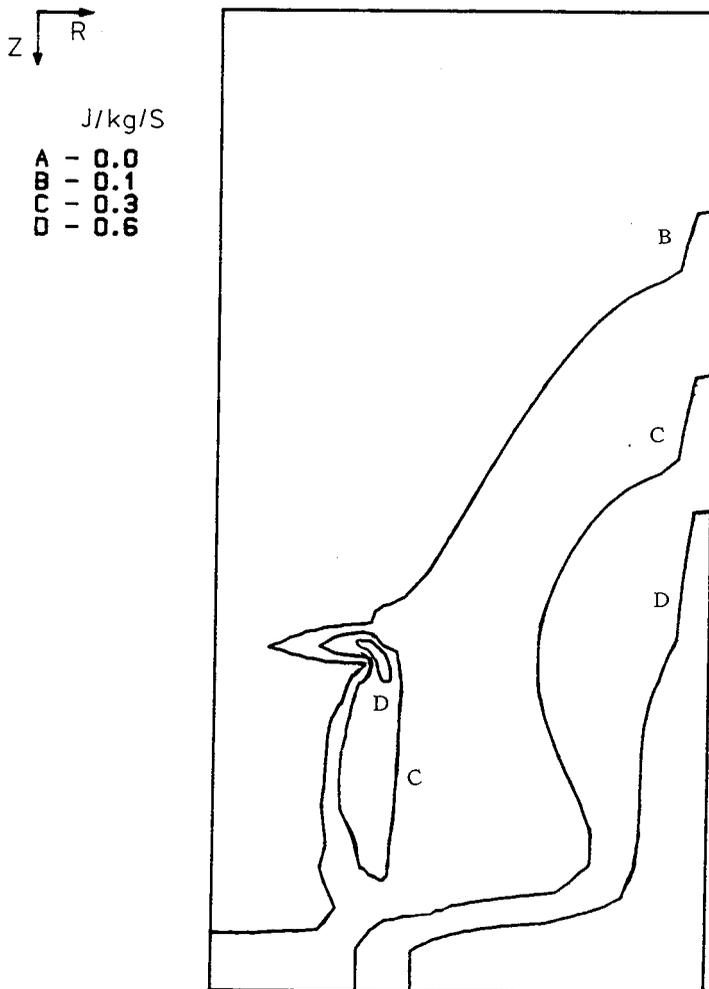


Figure 48. Champ de dissipation du à la turbulence obtenu lors de la simulation de l'écoulement dans une cuve agitée cylindrique.

Les lignes de courant déduites de notre simulation ainsi que celles obtenues expérimentalement [FORT, 1989] sont représentées sur la figure 49 (page 111). Cette figure montre un bon accord entre les données expérimentales et mesurées.

L'évolution du champ de pression obtenu dans la cuve est conforme à ce que l'expérience laisse supposer. Nous obtenons bien des surpressions au contact de la paroi située en face du jet et dans les zones périphériques du bas de la cuve, zones contre lesquelles le jet vient s'écraser.

Les champs caractéristiques de la turbulence que nous avons trouvés traduisent les mêmes phénomènes que ceux que nous avons observés lors de l'étude du jet dans un milieu infini. La turbulence est générée essentiellement à la périphérie du jet puis convectée dans le reste de la cuve. On note également des valeurs élevées de la viscosité turbulente dans l'oeil de recirculation ce qui est logique vu la grandeur, dans cette zone, de l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence.

En suivant la méthodologie décrite plus haut, nous avons calculé les débits de circulation pour chacun des régimes d'écoulement envisagés. Conformément à l'expérience, les résultats obtenus montrent que le rapport débit de circulation/débit de pompage est indépendant de la vitesse en sortie de jet, ce qui est accord avec la théorie de la similitude. L'évolution de ce rapport en fonction de D/T est donnée par le tableau 8 qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux que l'on peut modéliser à l'aide de la corrélation [BRUXELMANE, 1976] :

$$(22) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{qc}}{N_{qp}} = \frac{Q_c}{Q_p} = 0,419 \left(\frac{D}{T}\right)^{-1,45} \\ 0,20 < \frac{D}{T} < 0,33 \\ 0,33 < \frac{Y}{T} < 0,50 \end{array} \right.$$

Où : Y = distance entre le fond de la cuve et l'hélice,
D = diamètre de l'hélice,
T = diamètre de la cuve.

D/T	Q _c /Q _p	Q _c /Q _p
	Simulation	Corrélation 22
0,1	5	
0,2	5	4,3
0,3	2,7	2,4
0,4	2	

Tableau 8. Valeur du rapport du débit de circulation au débit de pompage pour différents diamètres de mobile.

Le tableau ci-dessus nous montre que, d'après nos calculs, la valeur de Q_c/Q_p reste constante pour les valeurs 0,1 et 0,2 de D/T ce qui, comme nous le verrons, n'est pas le cas si l'on considère les cuves 2 et 3. Ceci est probablement dû au fait que l'oeil de circulation, qui met en jeu des débits relativement importants par rapport au débit de pompage dans le cas où D/T vaut 0,1, ne peut se développer normalement vu la proximité de l'hélice et du fond de la cuve.

IV.3.3. Cuve 2

La cuve 2 est une cuve de géométrie standard dans laquelle l'hélice est placée à mi-hauteur. De même que dans le cas précédent, le champ de vitesse a été calculé pour plusieurs diamètres de jet et pour des vitesses en sortie de jet de 0,5 ; 1,0 ; 1,5 et 2,0 m/s. A partir de ces résultats, et en procédant de la même façon que pour la cuve 1, nous avons calculé les débits de circulation. Les valeurs ainsi obtenues, représentées dans le tableau 9, sont en bon accord avec celles données dans la littérature [BRUXELMANE, 1976].

Les champs de pression, k et ϵ obtenus présentent les mêmes caractéristiques que ceux trouvés dans le cas de la cuve 1.

D/T	Q _c /Q _p	Q _c /Q _p
	Simulation	Corrélation 22
0,1	10	
0,2	5	4,3
0,3	3	2,4
0,4	2	

Tableau 9. Valeur du rapport du débit de circulation au débit de pompage pour différents diamètres de mobile.

IV.3.4. Cuve 3

La cuve 3, dont les dimensions sont données sur la figure 40 (page 110), a une géométrie non standard. Le champ de vitesse engendré par le mobile axial a été calculé pour plusieurs diamètres de jet et pour des vitesses en sortie de jet de 0,2 ; 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 et 3,0 m/s.

Dans chacun de ces cas nous avons calculé les débits de circulation en procédant de la même façon que précédemment. Les résultats obtenus (tableau 10) sont assez proches de ceux trouvés dans le cas des cuves 1 et 2 ce qui paraît normal vu les faibles écarts entre les dimensions relatives de ces trois cuves.

Les champs de pression, k et ε obtenus présentent les mêmes caractéristiques que ceux trouvés dans le cas de la cuve 1.

D/T	Q_c/Q_p
0,1	8
0,2	3,2
0,3	1,6
0,4	1

Tableau 10. Valeur du rapport du débit de circulation au débit de pompage pour différents diamètres de mobile.

IV.4. CONCLUSION

Nous avons étudié trois écoulements en cuve agitée. Dans chacun de ces cas nous avons utilisé le modèle k - ε et la méthode de résolution décrite au chapitre C. Des conditions aux limites de jet ont été prises pour représenter le mobile axial.

Dans ces conditions nous avons obtenu, pour tous les cas étudiés, des champs de vitesse moyenne en accord avec les données expérimentales en notre possession.

Les simulations que nous avons menées sur une cuve de géométrie non standard montrent que, lorsque le rapport de la hauteur divisée par le diamètre de la cuve devient inférieur à 1, on obtient une diminution de Q_c/Q_p , pour une même valeur de D/T .

V. ETUDE DU BASSIN ANNULAIRE DE 2800 m³

V.1. INTRODUCTION

Nous allons maintenant modéliser l'hydrodynamique du bassin de 2800m³ que nous avons présenté au paragraphe A.IV.2. Dans un premier temps nous testerons trois modèles de turbulence sur un cas expérimental connu. Après avoir choisi le modèle le mieux adapté nous étudierons la vitesse de convergence de notre processus itératif de résolution. Puis, après avoir déterminé le nombre minimal d'itérations à réaliser pour approcher la solution de façon convenable, nous réaliserons une étude systématique du fonctionnement du bassin en considérant les étapes suivantes :

- Etude de l'influence de la vitesse en sortie d'hélice pour un diamètre de jet fixé,
- Etude de l'influence du diamètre de l'hélice et de la vitesse en sortie de jet sur la vitesse moyenne de circulation,
- Etude de l'influence de la profondeur et de l'écartement des hélices,
- Recherche de l'orientation optimale des hélices,
- Etude du cas où les deux hélices sont diamétralement opposées.

Des résultats expérimentaux sont disponibles pour le premier des points cités ci-dessus.

V.2. ETUDE DE TROIS MODELES DE TURBULENCE

V.2.1. Introduction

Le bassin a été simulé à l'aide du maillage représenté sur la figure 49. Notons ici que, pour des facilités de maillage, les jets sont considérés comme ayant une section carrée de même surface que l'hélice étudiée. La vitesse de rotation des hélices a été fixée à 37,5 tours par minute ce qui correspond à une vitesse en sortie d'hélice de 0,87 m/s. Afin d'étudier l'influence de divers modèles de turbulence le champ de vitesse a été calculé en utilisant successivement les trois modèles suivants :

- Modèle k- ϵ ,
- Modèle utilisant une viscosité turbulente constante sur l'ensemble du domaine,
- Modèle utilisant la relation de Nikuradse,

La comparaison entre les résultats ainsi obtenus et les mesures expérimentales nous permettra de voir lequel de ces trois modèles est le mieux adapté à notre étude.

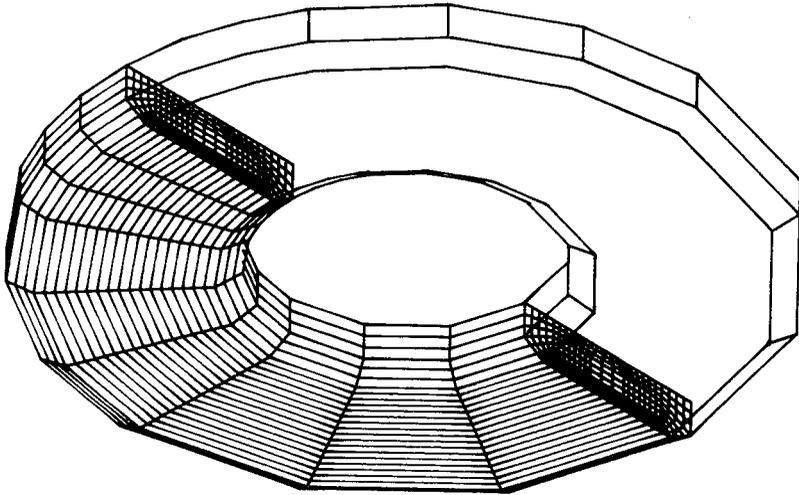


Figure 49. Maillage utilisé lors de la simulation de l'écoulement dans le canal de 2800m^3 .

V.2.2. Présentation des résultats expérimentaux

L'observation visuelle simple permet de constater que la vitesse de rotation des hélices de 37,5 tours par minute qui a été choisie est suffisante, tout au moins pour les vitesses de surface. La puissance spécifique correspondante est de $0,63 \text{ W/m}^3$. Pour une telle puissance spécifique la vitesse moyenne de circulation est de $0,26 \text{ m/s}$, valeur que l'on peut considérer comme satisfaisante pour assurer une bonne circulation et éviter les dépôts de boues.

En suivant la méthodologie décrite au paragraphe A.IV.2.2 des cartes iso-vitesses ont été établies sur les sections du chenal définies sur la figure 50.

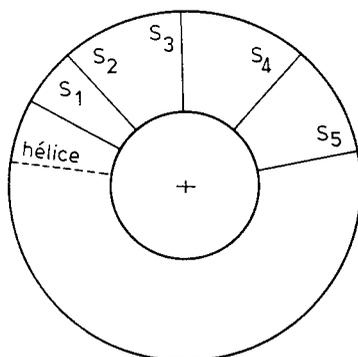


Figure 50. Localisation des sections sur lesquelles les champs de vitesses ont été mesurés.

La figure 51 met en évidence l'action des agitateurs, notamment l'agitateur intérieur qui est le plus proche de la section de mesure.

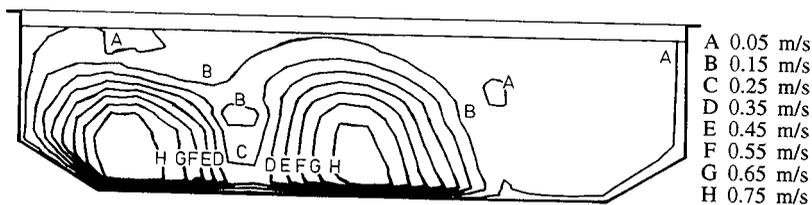
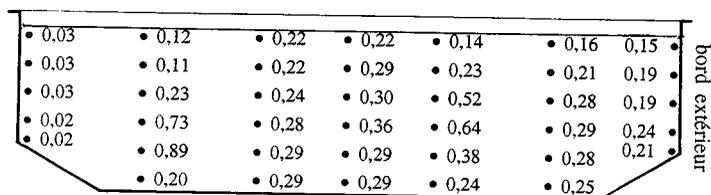


Figure 51. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) [BERTRAND, 1987] et simulé sur la section S_1 du chenal de 2800 m^3 .

Les cartes iso-vitesses (figure 51 à 53) évoluent jusqu'à la troisième section (figure 53) après quoi une circulation stable est établie (figures 54 et 55). Sur ces deux dernières cartes, on constate la très grande homogénéité des vitesses d'écoulement sur toute la section, avec les vitesses les plus faibles aux abords des deux parois du chenal.

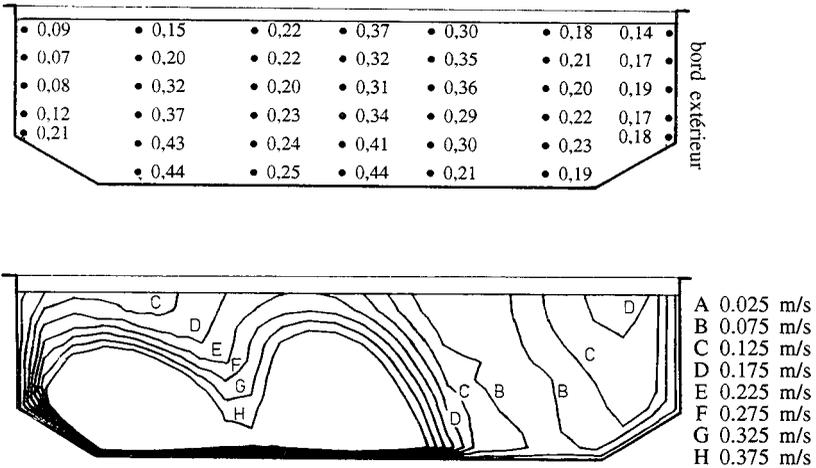


Figure 52. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) [BERTRAND, 1987] et simulé sur la section S_2 du chenal de 2800 m^3 .

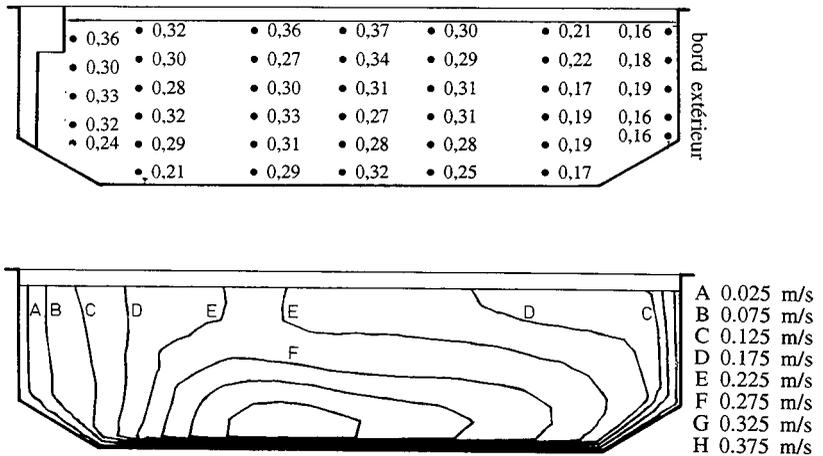
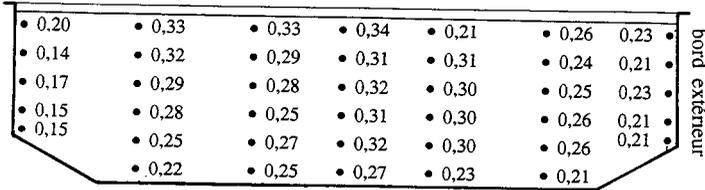
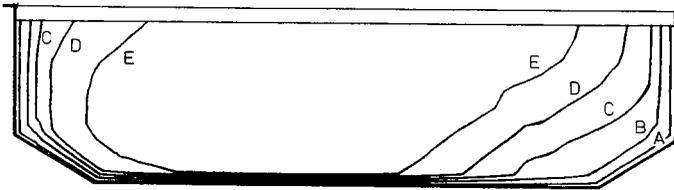


Figure 53. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) [BERTRAND, 1987] et simulé sur la section S_3 du chenal de 2800 m^3 .

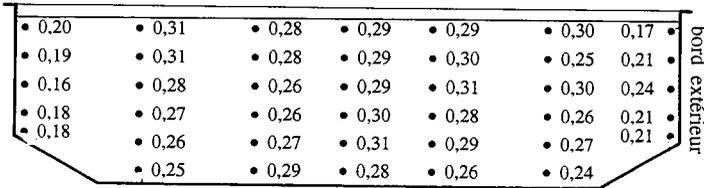


bord extérieur

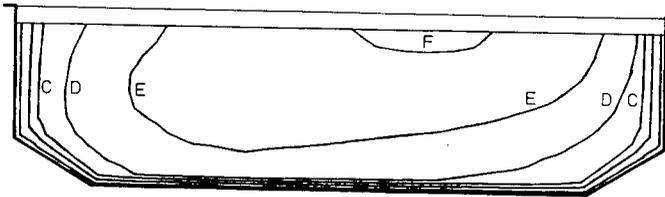


- A 0.025 m/s
- B 0.075 m/s
- C 0.125 m/s
- D 0.175 m/s
- E 0.225 m/s
- F 0.275 m/s
- G 0.325 m/s
- H 0.375 m/s

Figure 54. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) [BERTRAND, 1987] et simulé sur la section S_4 du chenal de 2800 m^3 .



bord extérieur



- A 0.025 m/s
- B 0.075 m/s
- C 0.125 m/s
- D 0.175 m/s
- E 0.225 m/s
- F 0.275 m/s
- G 0.325 m/s
- H 0.375 m/s

Figure 55. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) [BERTRAND, 1987] et simulé sur la section S_5 du chenal de 2800 m^3 .

V.2.3. Modèle k-ε

Ce modèle a été testé lors de la modélisation de l'écoulement dans un tube, dans un jet et dans une cuve agitée. Dans ce dernier cas il a donné des résultats conformes à l'expérience ce qui nous permet de penser, a priori, qu'il est capable de modéliser le type d'écoulement étudié ici.

Après avoir réalisé la simulation nous allons comparer les résultats numériques et expérimentaux. Les figures 51 à 55 représentent côte à côte les valeurs expérimentales et simulées de la vitesse obtenues sur différentes sections du chenal.

Ces valeurs sont assez différentes sur la section S_1 surtout si l'on considère la zone située en face de l'hélice la plus extérieure. Cet écart est certainement dû à notre modélisation trop simple de l'hélice : nous avons négligé la composante radiale de la vitesse en sortie d'hélice et certainement sous-estimé l'intensité de la turbulence. On remarque toutefois (figure 51) que la forme carrée que nous avons imposée aux jets s'est rapidement estompée. Dès la section S_2 le résultat de nos calculs est correct, en particulier la zone de faible vitesse située entre les hélices est bien rendue.

Si l'on considère maintenant les autres sections du chenal on note un accord satisfaisant entre les données expérimentales et simulées bien que le résultat de notre simulation semble sous estimer systématiquement la vitesse du fluide. Ceci peut être du, comme nous le verrons plus en détail par la suite, à une mauvaise estimation du nombre de pompage des hélices.

Afin de comparer entre eux les modèles de turbulence que nous allons tester, nous avons représenté, sur un plan situé à mi-hauteur, (figure 56) le champ de vitesse et la courbe donnant la vitesse sur la section S_3 . Cette courbe traduit un bon accord entre la simulation et l'expérience. Notons que notre simulation a donné une vitesse de circulation de 0,23 m/s qui est comparable à la valeur expérimentale (0,26m/s).

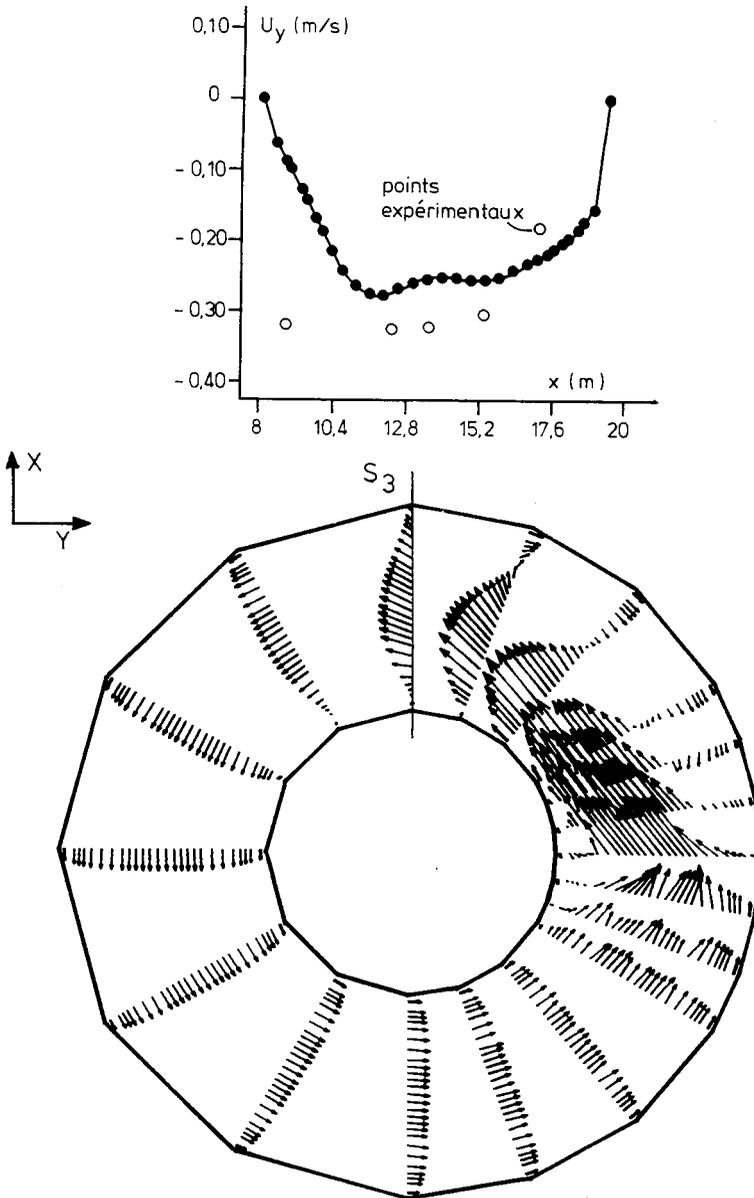


Figure 56. Champ de vitesse et profil de vitesse sur la section S_3 obtenus dans le cas où la turbulence est simulée à l'aide du modèle k- ϵ .

V.2.4. Aspects informatiques relatifs au modèle k-ε

Le modèle k-ε ne nécessite pas plus de mémoire que les autres modèles envisagés. Ceci est dû au fait que nous avons utilisé une méthode de résolution à variable séparée qui occupe la même place en mémoire quel que soit le nombre de degrés de liberté des équations à résoudre.

D'après les essais que nous avons réalisés, et conformément à ce que l'on peut penser, le temps mis par l'ordinateur pour réaliser une itération est plus long avec le modèle k-ε qu'avec les autres modèles. Cette augmentation du temps nécessaire à traiter une itération est compensée par le fait que l'introduction du modèle k-ε dans le système à résoudre stabilise le processus itératif. Cette augmentation de la stabilité se traduit par une augmentation de la vitesse de convergence et en conséquence par une diminution du nombre d'itérations nécessaire à approcher la solution de façon convenable.

En conclusion du paragraphe ci-dessus nous pouvons donc dire que l'utilisation du modèle k-ε :

- augmente le temps mis par l'ordinateur pour réaliser une itération,
- stabilise la méthode de résolution,
- diminue le nombre d'itérations nécessaire à approcher la solution de façon convenable.

La conjugaison des deux phénomènes inverses de l'augmentation du temps mis par l'ordinateur pour réaliser une itération et de la diminution du nombre d'itérations nécessaire à approcher la solution de façon convenable font que, pour atteindre une bonne approximation de la solution des équations, il faut 30% de temps de calcul en plus avec le modèle k-ε par rapport à l'un quelconque des autres modèles que nous allons tester.

V.2.5. Viscosité turbulente constante sur l'ensemble du domaine

Lors de cette simulation nous allons résoudre les équations de Navier-Stokes en supposant que l'effet de la turbulence se traduit par une simple modification de la viscosité apparente du fluide.

Nous avons, dans un premier temps, résolu les équations de Navier-Stokes en supposant que la viscosité apparente est égale à la viscosité laminaire. Ceci revient à considérer une viscosité turbulente nulle. Le résultat de cette simulation, représenté sur la figure 57, n'est pas en accord, même qualitativement avec les résultats expérimentaux. En effet, si l'on considère la courbe donnant la vitesse sur la section S_3 , on constate la présence d'un deuxième oeil de circulation sur le bord intérieur du chenal qui n'apparaît pas dans la réalité. La simulation décrite ici a donné une vitesse de circulation de 0,20 m/s qui est sensiblement plus faible que la valeur expérimentale (0,26 m/s).

Une autre façon de faire consiste à donner à la viscosité turbulente une valeur constante non nulle. Nous pouvons, pour ce faire nous inspirer des résultats que nous avons obtenus lors de l'étude de l'écoulement dans un tuyau. Nous avons en effet montré lors de cette étude que, dans le cas d'un écoulement où la turbulence est générée par les parois, la valeur de la viscosité turbulente qui permet d'obtenir un profil de vitesse comparable à celui issu d'une simulation par le modèle k- ϵ était donnée par la relation :

$$\nu_t = 2,7 \cdot 10^{-5} R_e^{0,26} \text{ m}^2/\text{s}$$

Les essais que nous avons menés en donnant cette valeur à la viscosité turbulente ont donné un champ de vitesse (figure 58) qualitativement proche de celui obtenu à l'aide du modèle k- ϵ . Si l'on considère la courbe représentative de la vitesse à mi-hauteur sur la section S_3 (figure 58) on constate que les résultats obtenus sont toutefois assez éloignés des valeurs expérimentales. L'écart que nous enregistrons ici peut s'expliquer en comparant la valeur constante de 1,4 Pa.s que nous avons donnée à la viscosité turbulente à certaines valeurs, localement plus élevées, utilisées par le modèle k- ϵ (figure 59). Notons que nous avons obtenu une vitesse de circulation simulée de 0,22 m/s qui traduit un meilleur accord avec l'expérience que la valeur précédemment obtenue.

En conclusion de ce paragraphe nous pouvons dire que, même si le deuxième essai que nous avons réalisé nous a donné de meilleurs résultats, le modèle que nous venons de tester ne nous a pas permis d'obtenir des profils de vitesse corrects sur la section S_3 .

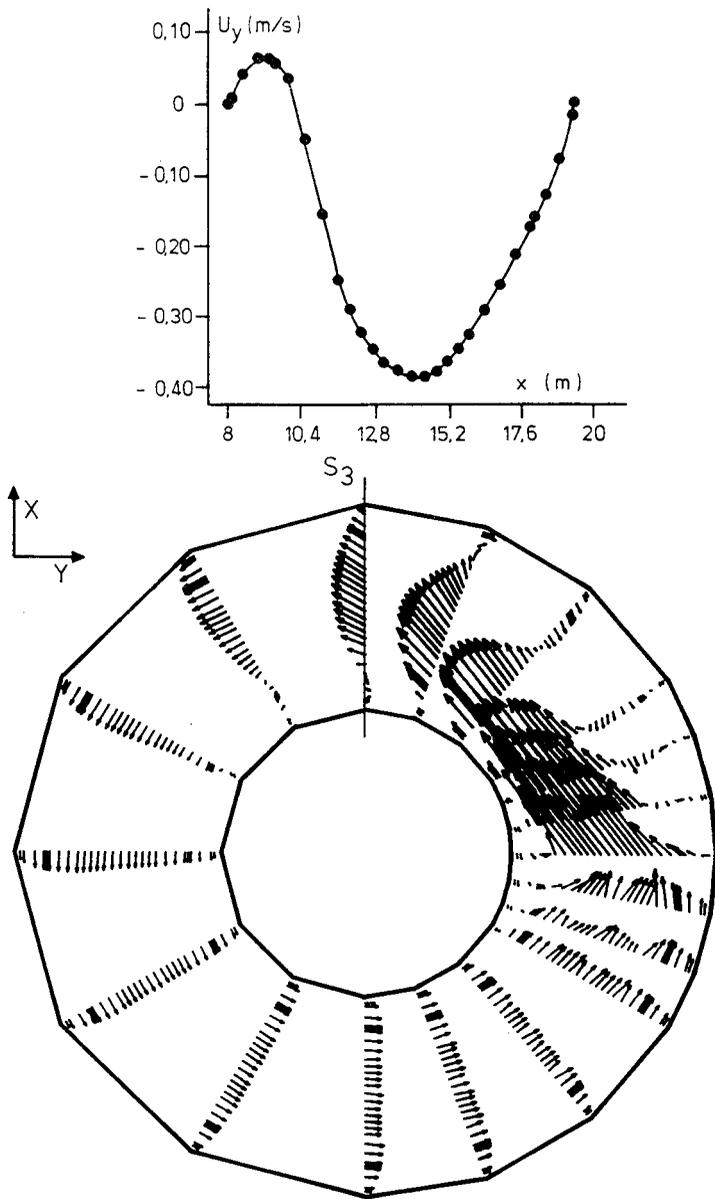


Figure 57. Champ de vitesse et profil de vitesse sur la section S_3 obtenus dans le cas où la turbulence est simulée à l'aide d'une viscosité constante et égale à 10^{-3} Pa.s.

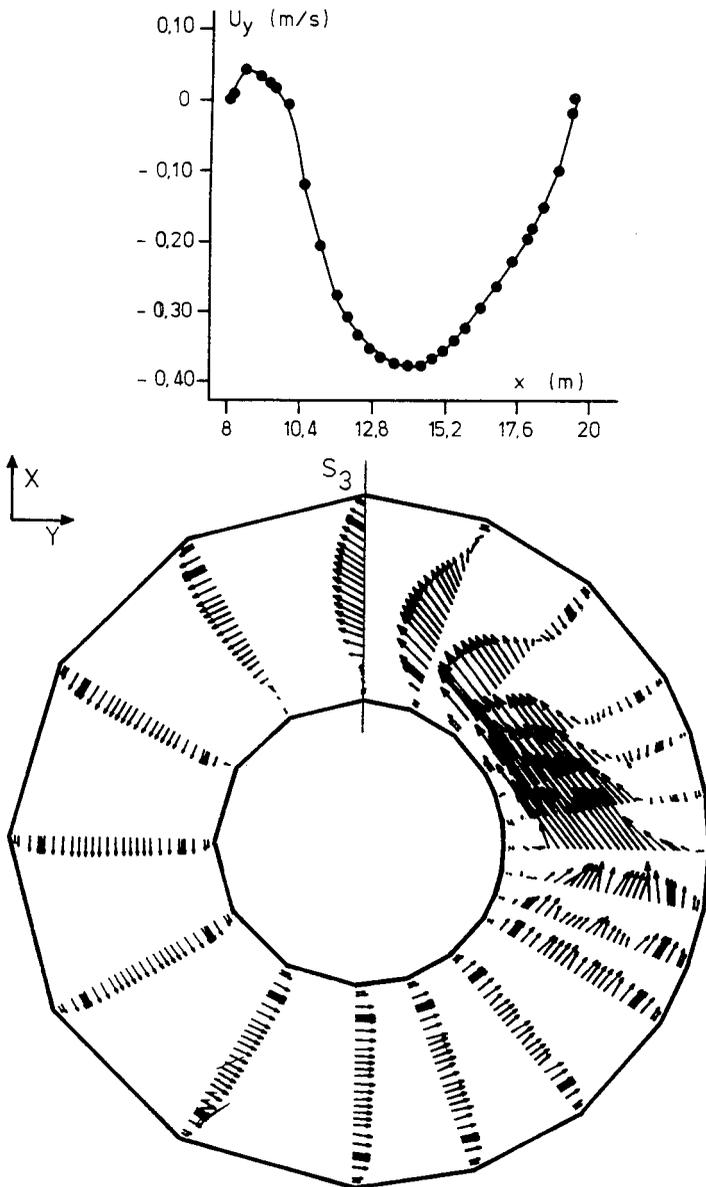


Figure 58. Champ de vitesse et profil de vitesse sur la section S_3 obtenus dans le cas où la turbulence est simulée à l'aide d'une viscosité constante et égale à 1,4 Pa.s.

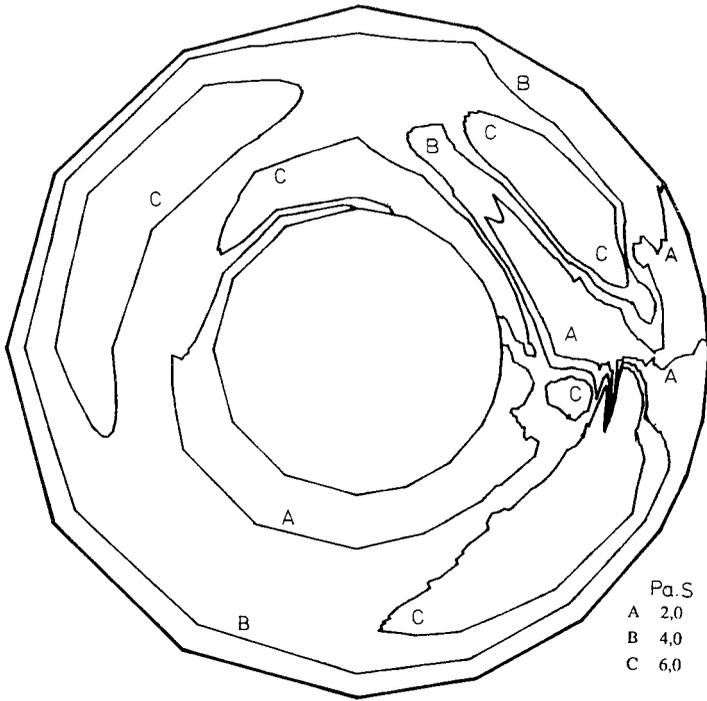


Figure 59. Champ de viscosité turbulente obtenu dans le cas où la turbulence est simulée à l'aide du modèle k-ε.

V.2.6. Modèle utilisant la relation de Nikuradse

Nous allons tester ici un modèle de longueur de mélange. Dans ce type de modèle, décrit avec plus de détails au paragraphe B.III.2.1, la valeur de la viscosité turbulente est donnée par la relation :

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Dans cette relation la valeur de la longueur de mélange apparaît comme une inconnue. Nous devons donc la modéliser à l'aide d'une loi empirique. Le choix de cette loi a été établi sous la contrainte qu'elle puisse être

transposée à d'autres géométries de chenal, pour lesquelles la position des hélices par rapport aux parois est a priori quelconque. Nous avons donc utilisé une loi qui ne prend pas en compte l'influence des hélices. En procédant ainsi nous admettons ne pas pouvoir obtenir de champ de vitesse correct en sortie d'hélice mais nous pouvons espérer obtenir une valeur de la vitesse de circulation proche de la réalité. La relation suivante, formulée par Nikuradse (paragraphe B.III.2.1), a été choisie :

$$\frac{I}{R} = 0,14 - 0,08 (1 - y/R)^2 - 0,06 (1 - y/R)^4$$

R est la profondeur du canal

y est la distance à la paroi la plus proche

Le résultat de cette simulation, représentée sur la figure 60, n'est pas en accord, même qualitatif avec les résultats expérimentaux. On constate en effet sur la courbe donnant la vitesse à mi-hauteur sur la section S_3 la présence d'un deuxième oeil de circulation sur le bord intérieur du chenal qui n'apparaît pas dans la réalité. Cet écart peut s'expliquer par le fait que les valeurs de la viscosité turbulente obtenues à l'aide de ce modèle sont bien plus faibles que celles trouvées avec le modèle k- ϵ , ce qui est normal car la turbulence générée par le jet n'est pas prise en compte. On notera que la vitesse moyenne de circulation (0,20 m/s) est sensiblement plus faible que la valeur expérimentale (0,26 m/s).

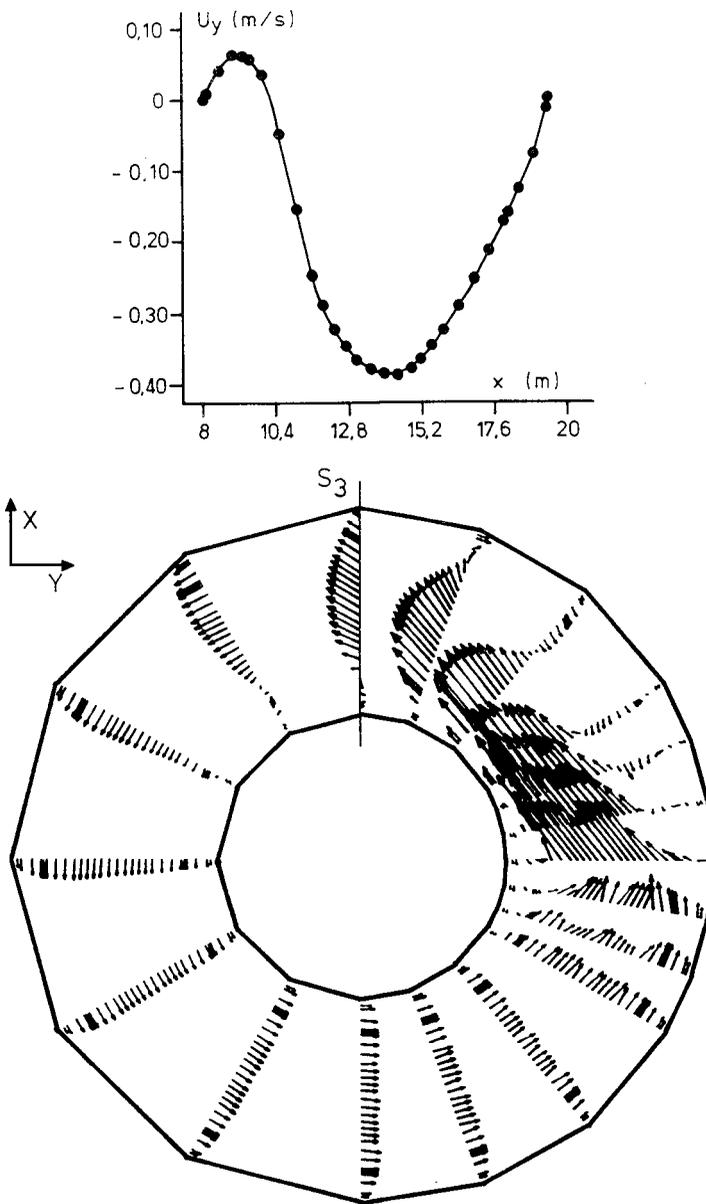


Figure 60. Champ de vitesse et profil de vitesse sur la section S_3 obtenus dans le cas où la turbulence est simulée par une longueur de mélange calculée à l'aide de la relation de Nikuradse.

V.2.7. Conclusion

Dans les paragraphes ci-dessus nous avons successivement testé trois modèles de turbulence. A la suite de ces essais nous pouvons faire les remarques suivantes sur le modèle k- ϵ :

- Les résultats qu'il fournit sont les plus proches de l'expérience.
- Il ne nécessite pas plus de mémoire que les autres modèles.
- Le temps de calcul dont il a besoin est supérieur de 30% à celui nécessaire aux autres modèles.
- Il stabilise grandement les équations, la viscosité turbulente prenant des valeurs assez élevées dans les zones à fort gradient de vitesse.
- Il donne des informations plus fines sur la nature turbulente de l'écoulement.

Compte tenu de ces remarques nous avons choisi le modèle k- ϵ pour réaliser le reste de notre étude.

V.3. ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE

Avant de commencer l'étude systématique du fonctionnement du bassin nous allons étudier la vitesse de convergence de notre processus itératif. Le but de cette étude est de déterminer le nombre minimal d'itérations à réaliser pour approcher la solution de façon convenable.

Les résultats que nous allons exposer maintenant ont été obtenus en considérant une vitesse en sortie de jet de 0,87 m/s. Au cours du calcul de cet écoulement nous avons noté la vitesse moyenne de circulation en fonction du nombre d'itérations réalisées (Tableau 11). Nous avons également étudié l'évolution des profils de vitesse et de pression (Annexe A1) en fonction du nombre d'itérations. L'étude de ces données nous montre qu'après une centaine d'itérations on peut considérer que les champs de vitesse et de pression donnés par la méthode numérique utilisée ici n'évoluent plus.

nombre d'itération	20	40	60	80	100
\bar{U}_c (m/s)	0,17	0,20	0,22	0,23	0,23

Tableau 11. Vitesse de circulation en fonction du nombre d'itérations réalisées.

V.4. ETUDE, A L'AIDE DU MODELE k-ε, DE L'ÉVOLUTION DU PROFIL DE VITESSE LOIN DES HÉLICES EN FONCTION DE LEUR VITESSE DE ROTATION

Des cartes iso-vitesses ont été établies en utilisant la méthodologie décrite au paragraphe A.IV.2.2. Ces cartes sont données sur la section 5 du chenal et pour des vitesses de rotation de l'hélice de 22,5 ; 37,5 ; 56 et 75 tours par minute. Ces cas expérimentaux ont été simulés à l'aide du modèle k-ε. Les courbes iso-vitesses obtenues sont représentées à coté des valeurs expérimentales sur les figures 55 (page 126) et 59 à 61. On constate sur ces courbes que les résultats de nos calculs, bien que qualitativement corrects, sous-estiment systématiquement la vitesse d'écoulement.

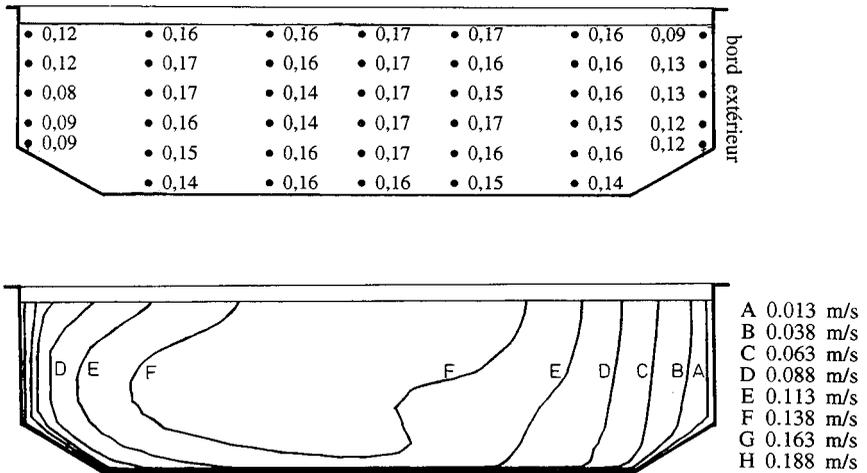


Figure 59. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) et simulé sur la section S_5 pour une vitesse de rotation des hélices de 22,5 tours/minute.

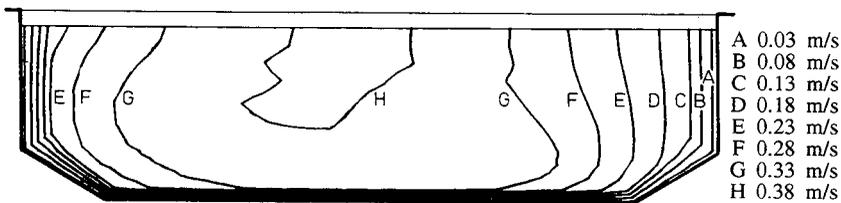
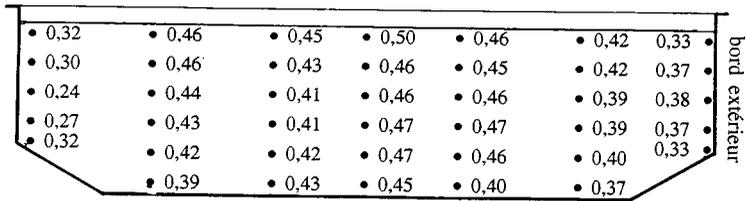


Figure 60. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) et simulé sur la section S_5 pour une vitesse de rotation des hélices de 56 tours/minute.

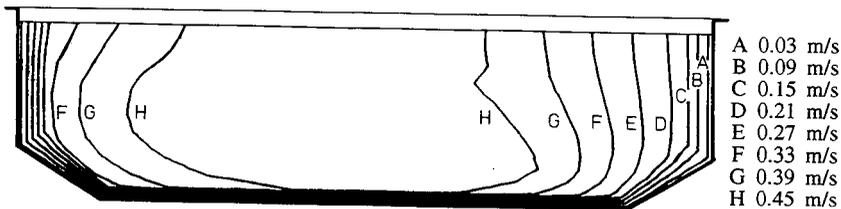
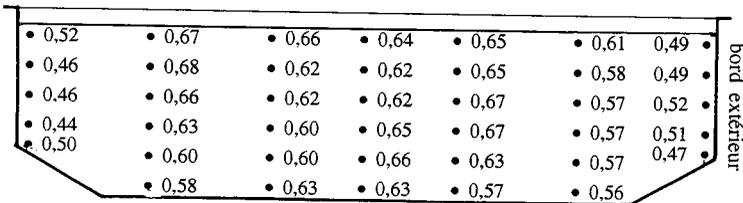


Figure 61. Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (en haut) et simulé sur la section S_5 pour une vitesse de rotation des hélices de 75 tours/minute.

Dans chacun des cas ci-dessus nous avons évalué la vitesse de circulation associée à l'écoulement. Ces résultats ont été reportés sur la figure 62 qui montre que, dans le cas simulé comme dans le cas expérimental, la vitesse de circulation est proportionnelle à la vitesse en sortie d'hélices comme le prédit la théorie de la similitude. Le coefficient de proportionnalité trouvé par le calcul (0,38) diffère toutefois de celui trouvé expérimentalement (0,45). Cette différence pouvant être expliquée par une mauvaise estimation du nombre de pompage des hélices. Cette explication semble d'autant plus valable que, comme nous le montrerons dans le chapitre D.VII, le modèle k-ε est capable, sur d'autres chenaux, d'évaluer correctement la valeur de la vitesse de circulation.

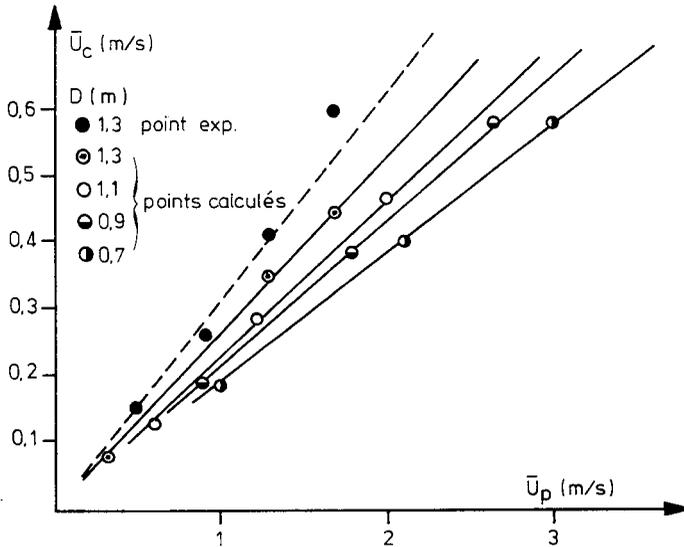


Figure 62. Vitesse de circulation en fonction de la vitesse en sortie de jet pour différents diamètres d'hélice.

V.5. ETUDE DE L'INFLUENCE DU DIAMETRE DES HÉLICES ET DE LA VITESSE EN SORTIE D'HÉLICE

Dans cette série d'essais nous avons considéré les hélices parallèles et orientées de telle façon que l'axe de l'hélice intérieure soit tangent au bord

intérieur du bassin. Pour ce mode de fonctionnement nous avons envisagé quatre diamètres d'hélice, et pour chacun d'eux, trois vitesses de jet. De chacune de ces 12 simulations nous avons déduit la vitesse de circulation à l'intérieur du chenal. L'ensemble de ces résultats, donné par le tableau 12, est représenté sur la figure 62. Comme l'expérience le laisse supposer les résultats obtenus donnent naissance à plusieurs droites, chacune étant associée à un diamètre d'hélice. La figure 63 nous montre qu'il y a relation de proportionnalité entre la vitesse moyenne de circulation et le produit $\bar{U}_p D$. Comme la vitesse de l'eau en sortie du mobile d'agitation est proportionnelle à sa vitesse de rotation (N), nous pouvons dire que \bar{U}_c est proportionnel à ND.

D (m)	0,7			0,9			1,1			1,3		
\bar{U}_p (m/s)	1,05	2,11	3,00	0,89	1,82	2,66	0,59	1,22	1,97	0,33	0,87	1,67
\bar{U}_c (m/s)	0,19	0,40	0,57	0,19	0,38	0,57	0,13	0,27	0,46	0,08	0,23	0,42

Tableau 12: Vitesse de circulation en fonction de la vitesse en sortie de jet et du diamètre de jet.

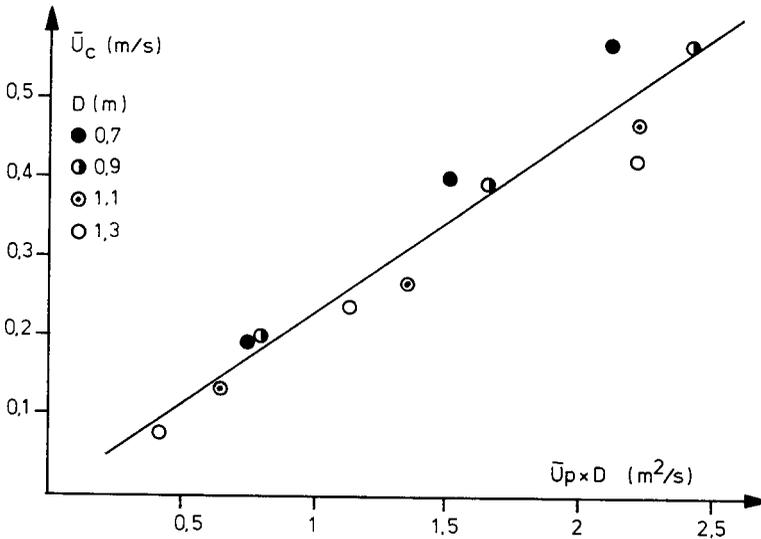


Figure 63. Vitesse moyenne de circulation en fonction du produit $\bar{U}_p D$.

La série de calculs que nous venons de décrire nous a permis de montrer que l'influence du diamètre des hélices et de la vitesse en sortie de jet sur la vitesse moyenne de circulation était conforme à ce que l'expérience et les approches empiriques nous laissaient supposer.

V.6. RÉPONSE A UNE VARIATION DE LA PROFONDEUR ET DE L'ÉCARTEMENT DES HÉLICES

Le modèle k- ϵ nous a permis de retrouver numériquement les résultats expérimentaux associés aux différents modes de fonctionnement du chenal de 2800 m³. Nous allons maintenant poursuivre notre étude afin de déduire les conditions optimales de fonctionnement de ce bassin. Nous entendons par conditions optimales une position et une orientation des hélices telles que :

- la vitesse de circulation du fluide soit suffisante,
- le volume des zones n'échangeant pas de matière avec le reste du réacteur (zones mortes) soit minimal.

Dans un premier temps nous allons tester l'évolution de la vitesse de circulation en fonction de la profondeur des hélices. Les calculs que nous avons menés ont été réalisés à l'aide du modèle k- ϵ et pour une vitesse en sortie d'hélice de 0,87 m/s qui correspond à une vitesse de rotation de 37,5 tours/mn. Au cours de ces essais nous avons fait varier la côte de l'axe des hélices, ce paramètre prenant successivement les valeurs 0,78 ; 1,08 ; 1,35 et 1,78 m.

Avant d'étudier les résultats de ces calculs, il faut noter qu'une imprécision de notre modélisation est probable lorsque les hélices sont trop proches de la surface ou du fond. La proximité des hélices de la surface induit dans la réalité des vortex, phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans nos calculs. La prise en compte de ce phénomène nécessiterait au moins un maillage à géométrie variable qui rendrait le problème encore plus lourd à traiter numériquement. La proximité des hélices du fond implique de très gros gradients de vitesse sous l'hélice que seul un maillage extrêmement dense pourrait permettre de modéliser correctement. Toutefois il est peu probable qu'une mauvaise modélisation de l'écoulement dans cette zone induise des erreurs notables dans l'estimation des vitesses d'écoulement dans le reste du

chenal. En conclusion de ce paragraphe nous pouvons donc dire que :

- la proximité des hélices du fond du bassin induit des erreurs de modélisation certainement assez faibles,
- les erreurs de simulation commises lorsque les hélices sont proches de la surface du bassin sont, elles, certainement importantes. Cette difficulté à modéliser une hélice proche de la surface est toutefois peu importante car il est évident que cette position des hélices ne correspond pas à l'optimum que nous cherchons.

Pour chacune des 4 hauteurs d'hélice envisagées nous avons évalué la vitesse de circulation du fluide. Les résultats que nous avons obtenus montrent que la profondeur de l'hélice n'influe pas sur cette vitesse. Les profils de vitesse obtenus immédiatement après les hélices sont, bien entendu, assez différents d'une hauteur d'hélice à l'autre comme il est représenté en annexe A.2.

Après avoir testé l'influence de la profondeur des hélices nous avons étudié l'effet d'une modification de l'écartement des mobiles d'agitation. Nous avons simulé les écartements d'hélices suivants : 2,81 ; 3,77 et 4,77 m. Pour chacune de ces valeurs nous avons évalué la vitesse de circulation du fluide. Les résultats que nous avons obtenus montrent que l'écartement des hélices n'influe pas sur cette vitesse.

V.7. RECHERCHE DE L'ORIENTATION OPTIMALE DES HÉLICES

Nous allons maintenant étudier l'effet de l'orientation des hélices sur le champ de vitesse dans le bassin. Pour réaliser cette série de calculs nous avons envisagé le cas où les hélices sont placées à mi-hauteur. Ces essais sont constitués par deux séries de calculs :

- dans un premier temps nous avons fait varier l'orientation des hélices tout en gardant leurs axes parallèles.
- la deuxième série de calculs que nous avons réalisée a consisté à faire varier l'orientation de l'hélice extérieure tout en conservant l'hélice intérieure tangente au bord intérieur du chenal.

Au cours de ces calculs l'orientation des hélices a été caractérisée par l'angle α défini sur la figure 64.

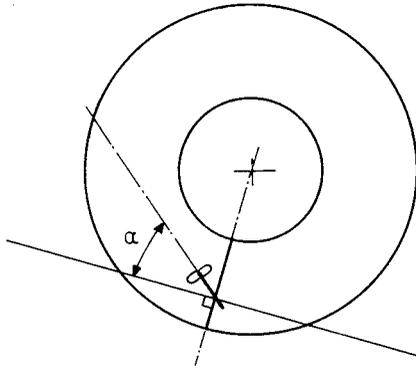


Figure 64. Définition de l'angle α caractéristique de l'orientation des hélices.

Le tableau 13 donne l'évolution de la vitesse moyenne d'écoulement obtenue par intégration de la vitesse sur une section du bassin située loin des hélices en fonction de la valeur de l'angle α . Ces données nous montrent que la vitesse moyenne d'écoulement est peu influencée par l'orientation des hélices.

α	38°	26°	13°	0°
\bar{U}_c (m/s)	0,23	0,21	0,21	0,18

Tableau 13: Vitesse moyenne d'écoulement en m/s en fonction de la valeur de l'angle α .

Si l'on considère maintenant les figures données en annexe A.3 qui représentent le champ de vitesse obtenu par le calcul sur un plan situé à mi-hauteur, nous constatons que la position et la grosseur des yeux de circulation sont très influencées par l'orientation des hélices.

En conclusion de l'étude de ces dernières figures, nous pouvons dire que la position dans laquelle l'hélice intérieure est tangente au bord intérieur du chenal correspond aux meilleures conditions de fonctionnement. Cette orientation des hélices correspond aux conditions de fonctionnement utilisées dans la pratique.

Dans la deuxième série de calculs nous avons étudié différentes valeurs de l'angle α caractéristique de l'orientation de l'hélice extérieure, l'hélice intérieure étant tangente au bord intérieur du chenal. Nous n'avons pas trouvé de variations significatives de la vitesse moyenne de circulation de l'eau. Si l'on considère maintenant les figures données en annexe A.4 qui représentent le champ de vitesse obtenu par le calcul sur un plan situé à mi-hauteur, nous pouvons constater que la localisation et la grosseur des yeux de circulation sont très influencées par l'orientation des hélices.

Dans la pratique, les hélices sont placées de façon telle que leurs axes soient parallèles et que l'axe de l'hélice intérieure soit tangent au bord intérieur du chenal. L'étude des champs de vitesse obtenus par les calculs cités ci-dessus montre que cette configuration se rapproche bien de la configuration optimale.

V.8. ETUDE D'UNE CONFIGURATION OU LES HÉLICES SONT DIAMÉTRALEMENT OPPOSÉES

Dans cet essai nous avons considéré le cas où les deux hélices sont diamétralement opposées et où leur axes sont tangents au bord intérieur du chenal. Nous avons considéré des hélices de 1,3 m de diamètre et des vitesses en sortie d'hélices de 0,87 m/s. La figure 65 montre les vecteurs vitesse situés sur un plan de coupe horizontal à mi-hauteur. Cette figure, qui permet de voir l'existence de grandes zones mortes, nous montre que cette configuration du bassin ne correspond pas à un bon régime de fonctionnement.

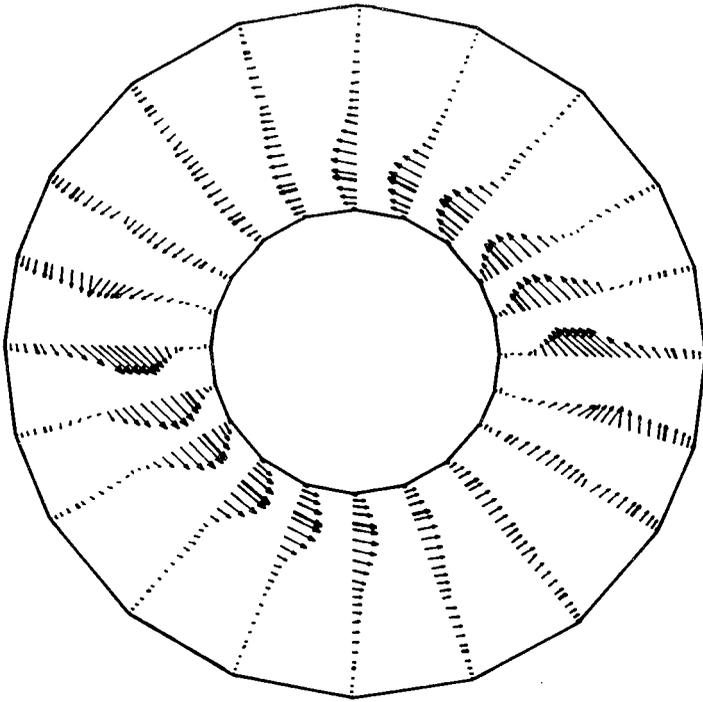


Figure 65. Champ de vitesse obtenu dans le cas où les hélices sont diamétralement opposées.

V.9. CONCLUSION

Au cours de l'étude que nous venons de présenter nous avons montré que :

- le modèle k- ϵ donne des résultats qualitativement corrects pour les cas étudiés expérimentalement,
- la localisation des hélices sur une section droite n'influence pas la vitesse de circulation,
- un bon fonctionnement du chenal est obtenu dans le cas où les axes des hélices sont parallèles et où l'hélice intérieure est tangente au bord intérieur du chenal.

VI. ETUDE DU BASSIN ANNULAIRE DE 860 m³

VI.1. INTRODUCTION

Nous allons maintenant étudier le cas du bassin annulaire que nous avons présenté au paragraphe A.IV.3. Nous commencerons par modéliser le cas expérimental connu où le bassin est muni de deux hélices. L'installation de deux hélices dans ce bassin donnant lieu à des vitesses moyennes de circulation trop importantes, nous avons dans la deuxième partie de ce paragraphe modélisé l'écoulement obtenu à l'aide d'une seule hélice.

VI.2. ESSAIS DE VALIDATION DE LA METHODE NUMÉRIQUE

Dans ce paragraphe nous allons vérifier que nous sommes capables de modéliser correctement l'hydrodynamique du bassin. Pour ce faire nous allons considérer le cas expérimentalement connu de deux hélices orientées parallèlement de façon telle que l'hélice la plus intérieure soit tangente au bord intérieur du chenal.

Dans les conditions de fonctionnement énoncées ci-dessus nous avons testé des vitesses en sortie de jet de 0,81 ; 1,21 ; 1,42 et 1,72 m/s qui correspondent respectivement à des vitesses de rotation de l'hélice (N) de 35, 52, 61 et 74 tours par minute. Dans chacun de ces quatre cas nous avons estimé la valeur de la vitesse de circulation (\bar{U}_c^{cal}) que nous avons comparée à la valeur expérimentale. Les résultats de ces calculs, rassemblés dans le tableau 14, montrent que la vitesse \bar{U}_c^{cal} peut être reliée à N par la relation:

$$\begin{aligned}\bar{U}_c^{\text{cal}} &= \phi_4 N \\ \phi_4 &= 0,53 \text{ m}\end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe A.IV.3.2 les résultats expérimentaux donnent la relation :

$$\begin{aligned}\bar{U}_c^{\text{exp}} &= 0,50 N \\ \phi_1 &= 0,50 \text{ m}\end{aligned}$$

\bar{U}_p (m/s)	N (tr/mn)	\bar{U}_c^{exp} (m/s)	\bar{U}_c^{cal} (m/s)
0,81	35	0,30	0,31
1,21	52	0,43	0,46
1,42	61	0,51	0,54
1,72	74	0,60	0,65

Tableau 14: Vitesses moyennes de circulation expérimentales et calculées en fonction de la vitesse de rotation des hélices.

On constate un bon accord entre la relation déduite de notre simulation et la corrélation expérimentale. Les valeurs de \bar{U}_c^{cal} sont toutefois élevées par rapport aux résultats obtenus lors de l'étude du bassin de 2800m³ pour lequel les vitesses de circulations calculées étaient inférieures à celles mesurées. Nous avons imputé la sous-évaluation des valeurs calculées à une mauvaise estimation du nombre de pompage. Cette erreur, toujours présente dans la simulation présentée actuellement, semble compensée par la non prise en compte de la dissipation d'énergie due aux vortex induits par la proximité de la surface des systèmes d'agitation.

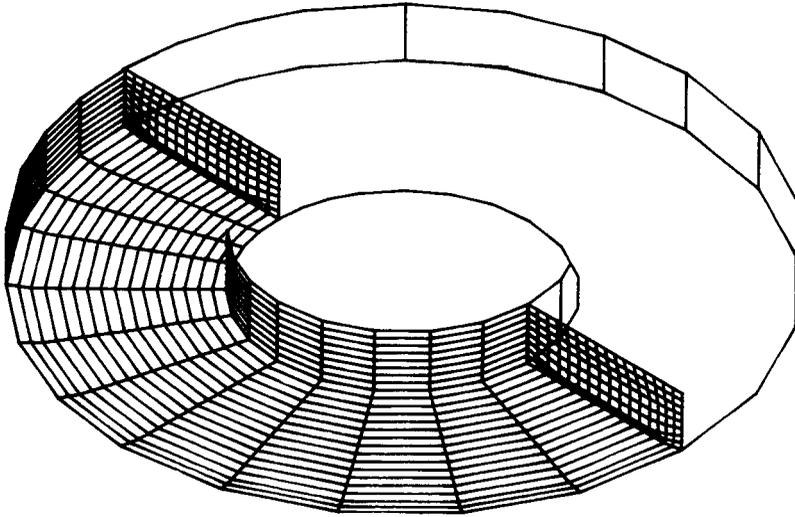


Figure 66. Maillage utilisé lors des simulations d'écoulement dans le chenal de 860 m³.

VI.3. ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE CAS D'UNE SEULE HÉLICE

Avant de commencer l'étude systématique du fonctionnement du bassin, dans le cas où il est muni d'une seule hélice, nous allons étudier la vitesse de convergence de notre processus itératif. Le but de cette étude est de déterminer le nombre minimal d'itérations à réaliser pour approcher la solution de façon convenable.

Les résultats que nous allons exposer maintenant ont été obtenus en considérant une vitesse en sortie de jet de 1,21 m/s. Au cours du calcul de cet écoulement nous avons noté la vitesse moyenne de circulation en fonction du nombre d'itérations réalisées (Tableau 15). L'étude de ces données et des champs de vitesse et de pression obtenus au fil des itérations nous montre qu'après une centaine d'itérations, on peut considérer que les champs de vitesse et de pression donnés par la méthode numérique utilisée n'évoluent plus.

nombre d' i t é r a t i o n	\bar{U} (m/s)
20	0,28
40	0,36
60	0,37
80	0,34
100	0,33

Tableau 15: Vitesse de circulation en fonction du nombre d'itérations réalisées.

VI.4. RÉPONSE A UNE VARIATION DU DIAMETRE DE L'HÉLICE ET DE LA VITESSE EN SORTIE D'HÉLICE

Dans cette série d'essais nous avons considéré l'hélice orientée de telle façon que son axe soit tangent au bord intérieur du bassin. Pour ce mode de fonctionnement nous avons envisagé quatre diamètres d'hélice, à chacun de ces diamètres nous avons associé trois vitesses de jet. Pour chacune de ces 12 simulations nous avons déduit la vitesse de circulation à l'intérieur du chenal.

L'ensemble de ces résultats, donné par le tableau 16, est représenté sur la figure 67 qui montre que les résultats obtenus donnent naissance à plusieurs droites, chacune étant associées à un diamètre d'hélice. Ce résultat est en accord avec l'expérience. La courbe 68 nous montre qu'il y a une relation de proportionnalité entre la vitesse de circulation et le produit $\bar{U}_p D$ ce qui est en accord avec les résultats obtenus au paragraphe D.V.5.

D (m)	0,7			0,9			1,1			1,3		
\bar{U}_p (m/s)	1,21	2,42	3,63	1,02	2,04	3,06	0,90	1,79	2,69	0,80	1,60	2,40
\bar{U}_c (m/s)	0,24	0,46	0,73	0,25	0,50	0,71	0,25	0,49	0,73	0,22	0,44	0,65

Tableau 16: Vitesse de circulation en fonction de la vitesse en sortie de jet et du diamètre de jet.

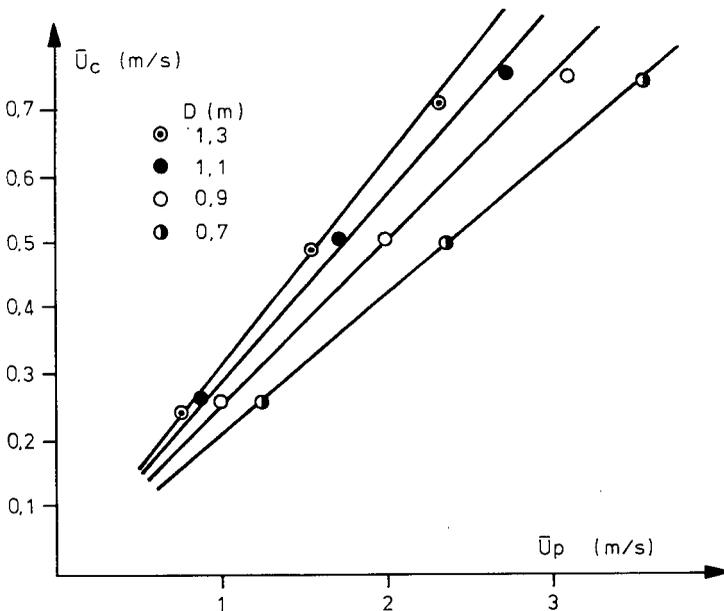


Figure 67. Vitesse de circulation en fonction de la vitesse en sortie de jet pour différents diamètres d'hélice.

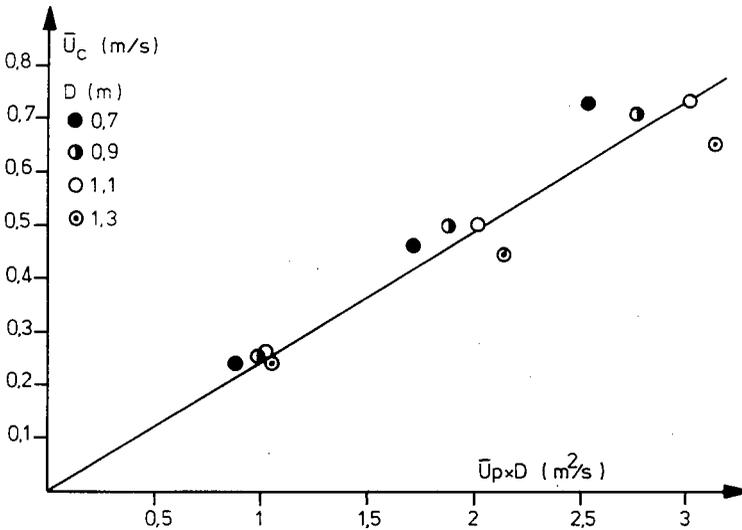


Figure 68. Vitesse moyenne de circulation en fonction du produit $\bar{U}_p D$.

La série de calculs que nous venons de décrire nous a permis de montrer que la simulation d'une variation du diamètre des hélices était conforme à ce que l'expérience et les approches empiriques nous laissaient supposer.

VI.5. RÉPONSE A UNE VARIATION DE L'ORIENTATION DE L'HÉLICE

Nous allons maintenant étudier l'effet de l'orientation de l'hélice sur la vitesse moyenne de circulation de l'eau dans le bassin ainsi que sur les profils de vitesse obtenus.

Pour réaliser cette série de calculs nous avons envisagé le cas où une hélice de 1,30 m de diamètre, placée à mi-hauteur, induit un jet de 1,21 m/s. Au cours de ces essais la position de l'hélice a été caractérisée par l'angle α défini sur la figure 64 (page 143).

Le tableau 17 donne l'évolution de la vitesse moyenne d'écoulement trouvée par le calcul en fonction de la valeur de l'angle α . Ces données nous montrent que la vitesse moyenne d'écoulement est peu influencée par

l'orientation de l'hélice. Si l'on considère maintenant les figures données en annexe B.1 qui représentent le champ de vitesse obtenu par le calcul sur un plan situé à mi-hauteur, nous pouvons constater que la position et la grosseur des yeux de circulation sont très influencées par l'orientation de l'hélice.

α	52°	39°	26°	13°	0°
\bar{U}_c (m/s)	0,32	0,33	0,35	0,34	0,32

Tableau 17: Vitesse moyenne d'écoulement en m/s en fonction de la valeur de l'angle α .

En conclusion de l'étude de ces dernières figures nous pouvons dire que la position dans laquelle la direction de l'hélice est tangente au bord intérieur du chenal correspond aux meilleures conditions de fonctionnement dans la mesure où l'hélice est suffisamment proche de la paroi interne. Cette orientation de l'hélice est celle utilisée dans la pratique.

VI.6. CONCLUSION

Les conditions aux limites et la méthode de résolution que nous avons employées nous ont permis de retrouver les valeurs de la vitesse de circulation mesurée sur un cas connu. Nous avons également retrouvé un comportement conforme à ce que l'expérience laisse supposer pour divers diamètres et vitesses en sortie de jet. Enfin nous avons montré que, si l'on admet que notre méthode de simulation est valable, l'orientation de l'hélice tangente au bord intérieur du chenal minimise les zones de recirculations.

VII. ETUDE D'UN CHENAL OBLONG

VII.1. INTRODUCTION

Les calculs que nous allons présenter ont été réalisés sur le cas du chenal de 1m^3 décrit au paragraphe A.IV.4.

Après avoir vérifié que le logiciel en notre possession est capable d'évaluer correctement les profils de vitesse sur un cas expérimental connu,

nous déterminerons, pour le même cas test, le nombre minimal d'itérations à réaliser pour approcher la solution de façon convenable. Une fois ces essais préliminaires réalisés nous simulerons le fonctionnement du bassin pour plusieurs diamètres de jet et plusieurs vitesses en sortie de jet. Le résultat de ces calculs sera comparé à l'expérience [RASCHID-SALLY, 1984] en prenant comme critère la vitesse moyenne de circulation.

VII.2. VALIDATION DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE

Nous avons utilisé une hélice de type A310 de diamètre 0,15 m et, pour trois vitesses de rotation (340, 670, 900 tours/mn), mesuré les profils de vitesse sur les sections du bassin données par la figure 69.

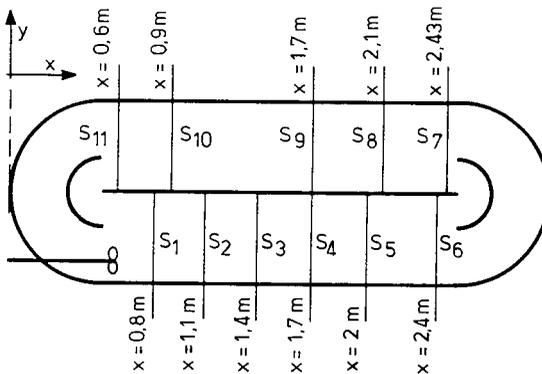


Figure 69. Localisation des surfaces sur lesquelles les profils de vitesse ont été relevés.

Pour obtenir ces profils de vitesse nous avons utilisé le micro-moulinet et la méthode de mesure décrits au paragraphe A.IV.2.2 et découpé les sections droites du bassin en damier déterminant ainsi les points de mesure. Les sections situées du côté de l'hélice ont été découpées en damier 5X5 (figure 71) les autres en damier 5X3 (figure 72). Un maillage plus dense a été choisi du côté de l'hélice vu les forts gradients de vitesse rencontrés dans cette région.

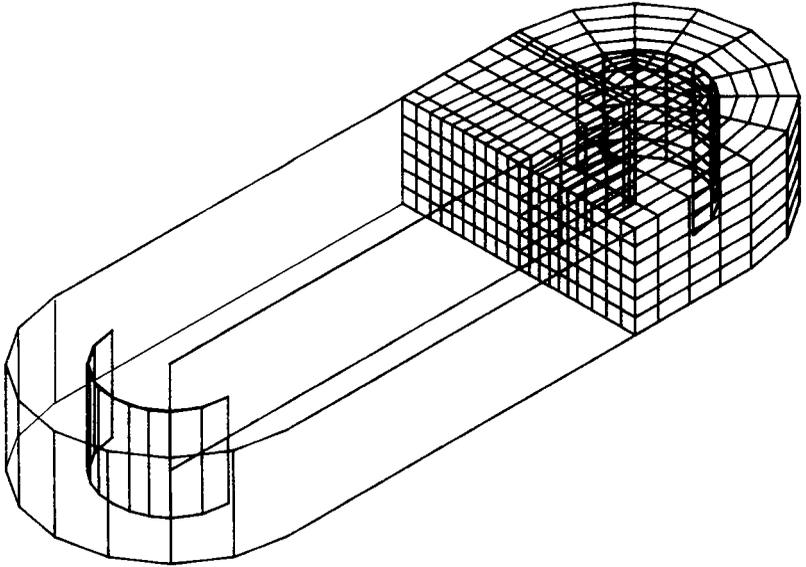


Figure 70. Maillage utilisé pour simuler les écoulements dans le bassin de 1 m^3 .

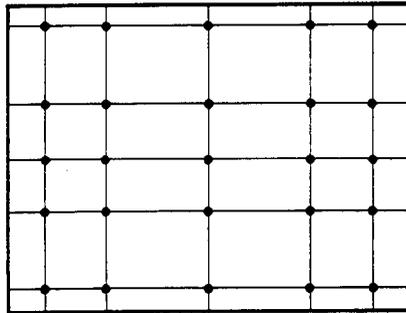


Figure 71. Localisation des points de mesure sur les surfaces 1 à 6.

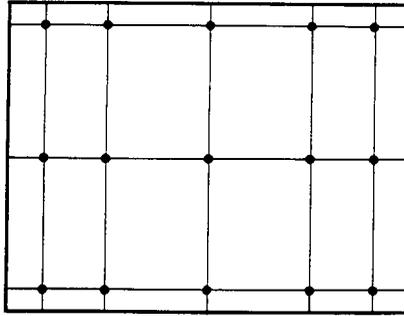


Figure 72. Localisation des points de mesure sur les surface 7 à 12.

Les trois cas expérimentaux décrits ci-dessus ont été simulés. Les qualités et défauts des résultats de ces calculs étant comparables, nous allons ici commenter et donner les résultats du seul cas où la vitesse de rotation de l'hélice est de 670 tours/mn.

Dans un premier temps, nous allons vérifier que nous sommes en mesure de retrouver qualitativement à l'aide de la simulation, les phénomènes que nous avons pu constater au cours des expériences. La figure 73, qui représente les vecteurs vitesse situés sur un plan horizontal à mi-hauteur du bassin vu de dessus, nous montre l'existence d'un oeil de recirculation entre l'hélice et le bord intérieur du chenal. L'existence d'un oeil de grandeur comparable a été constatée dans la réalité. La figure 73 citée ci-dessus nous montre également que le fluide a tendance à passer à l'extérieur du bol situé du côté de l'hélice et non à l'intérieur ; résultat numérique qui est confirmé par l'expérience.

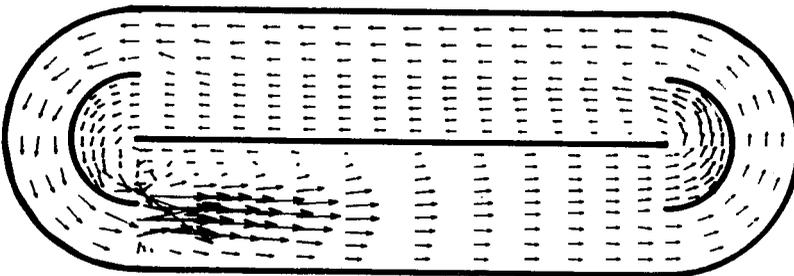
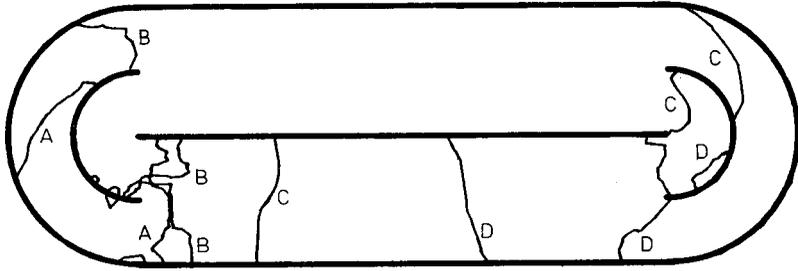


Figure 73. Champ de vitesse sur un plan horizontal situé à mi-hauteur.

La figure 74 représente les courbes iso-bares situées sur un plan horizontal à mi-hauteur du bassin vu de dessus. Comme la logique nous le laisse supposer on constate une surpression contre les murs situés en face de l'hélice puis une baisse de la pression que l'on peut interpréter comme une perte de charge. On constate également une dépression en amont de l'hélice qui peut être associée à l'aspiration de cette dernière.



- A -340 Pa
- B -220 Pa
- C - 90 Pa
- D 30 Pa

Figure 74. Champ de pression sur un plan situé à mi-hauteur.

Les figures données en annexe C.1 représentent les résultats expérimentaux, (vitesses relevées sur les points du damier) comparés aux résultats de la simulation, (courbes iso-vitesses). L'étude de ces courbes nous montre un bon accord général entre les résultats numériques et expérimentaux. On peut toutefois formuler deux critiques : la vitesse en sortie d'hélice est assez mal estimée, la vitesse en fond de bassin est systématiquement sous évaluée par la méthode numérique.

La première des deux critiques peut trouver sa justification dans le fait que nous avons assimilé l'écoulement en sortie de l'hélice à un jet carré. La forme du jet a visiblement peu d'effet sur le résultat obtenu puisque dès les premiers plans en aval de l'hélice on obtient des courbes iso-vitesses circulaires. Par contre cette approximation implique que la composante radiale de la vitesse ainsi que l'intensité de la turbulence en sortie d'hélice a été négligée. Le résultat de notre calcul nous donne ainsi des profils de jet plus pointus que dans la réalité.

Le deuxième défaut de nos résultats est de sous-estimer systématiquement la vitesse en fond de bassin. Ceci est certainement dû au fait que, pour des problèmes de mémoire de l'ordinateur et de temps de calcul, nous n'avons pas employé des densités de maillage suffisantes en fond de bassin .

VII.3. ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE

Pour réaliser l'étude de la vitesse de convergence que nous allons exposer maintenant nous avons considéré un jet de 0,15 m de diamètre et de vitesse en sortie 1,45 m/s. Au cours du calcul de cet écoulement nous avons noté la vitesse moyenne de circulation en fonction du nombre d'itérations réalisées (Tableau 18). Nous avons également étudié l'évolution des profils de vitesse (annexe C.2) en fonction du nombre d'itérations. L'étude de ces valeurs nous montre qu'après une centaine d'itérations on peut considérer que les champs de vitesse donnés par la méthode numérique utilisée ici n'évoluent plus.

nombre d'itération	20	40	60	80	100
\bar{U}_c (m/s)	0,27	0,37	0,33	0,30	0,31

Tableau 18: Vitesse de circulation en fonction du nombre d'itérations réalisées.

VII.4. ETUDE SYSTÉMATIQUE DES VITESSES MOYENNES DE CIRCULATIONS

Nous allons maintenant faire varier la vitesse en sortie de jet ainsi que le diamètre de jet et voir quelle est l'influence de ces deux paramètres sur la vitesse moyenne de circulation dans le chenal. L'étude expérimentale de ce problème, qui a été réalisée par Raschid-sally [RASCHID-SALLY, 1984], considère des jets générés par un tube ou par un mobile axial et dont les diamètres sont compris entre de 0,024 m et 0,199 m. Les configurations expérimentales considérées lors de cette étude ont été reprises et modélisées. Pour chacun des cas simulés nous avons calculé la vitesse moyenne de circulation que nous avons comparée au résultat expérimental. Les résultats de

ces calculs, donnés dans le tableau 19, sont en bon accord avec les mesures réalisées par Raschid-sally.

t y p e	D (m)	\bar{U}_p (m/s)	$\bar{U}_c^{e x p}$ (m/s)	$\bar{U}_c^{c a l}$ (m/s)
j e t	0.024	1.72	0.10	0.10
		2.74	0.16	0.17
		3.66	0.21	0.22
	0.030	2.14	0.14	0.13
	0.053	0.92	0.13	0.10
		1.33	0.18	0.15
1.93		0.24	0.21	
T P I	0.102	1.46	0.22	0.24
		1.73	0.26	0.28
		2.05	0.31	0.33
A 3 1 0	0.150	0.74	0.19	0.16
		1.45	0.33	0.29
		1.95	0.41	0.38
	0.199	0.58	0.19	0.17
		0.80	0.27	0.23
		1.12	0.36	0.33

Tableau 19. Vitesse de circulation en fonction de la vitesse en sortie de jet et du diamètre de jet.

VII.5. CONCLUSION

L'étude numérique que nous venons de réaliser nous a donné de bons résultats tant pour les profils de vitesse que pour les vitesses moyennes de circulation. Seule une mauvaise estimation du profil de vitesse dans les régions situées immédiatement après l'hélice ou en fond de bassin est à noter. Vu la qualité des résultats obtenus ici, il est légitime de penser que les écarts que nous avons enregistrés entre les résultats expérimentaux et numériques lors de la simulation du bassin de 2800m³ sont dus sûrement à une sous-estimation de 10% du nombre de pompage. En prenant 0,93 au lieu de 0,84 nous obtiendrions un bon accord entre les valeurs expérimentales et prédites.

VIII. CONCLUSION

L'étude des différents cas que nous avons présentés tout au long de ce chapitre nous permet de dégager les conclusions suivantes :

- Le champ de vitesse moyenne a été modélisé de façon satisfaisante dans chacun des cas expérimentaux étudiés : le tube, le jet dans un milieu infini, la cuve agitée et les chenaux d'oxydation.
- La modélisation des mobiles axiaux par un jet a donné des résultats corrects si l'on ne considère que le champ de vitesse loin des mobiles.
- Dans le cas du tube les pertes de charge calculées par la simulation sont en accord avec l'expérience. Nous pouvons donc penser que notre méthode de simulation a de bonnes chances de prendre en compte correctement les phénomènes à la paroi.
- Le champ de turbulence est qualitativement bien prédit dans le cas de l'écoulement dans un tube ou du jet dans un milieu infini. On note cependant des écarts quantitatifs non négligeables entre l'expérience et nos simulations.

CONCLUSION GENERALE

Le travail que nous venons de présenter nous a permis d'évaluer le comportement hydrodynamique de chenaux d'oxydation.

Les approches classiques que nous avons présentées au chapitre B sont des approches globales qui ne permettent d'obtenir que des valeurs approchées de la vitesse de circulation. De plus, la notion de diamètre (ou de longueur) équivalent qui y figure leur confère un caractère subjectif.

Dans les chapitres C, D et E nous avons présenté puis appliqué, à l'aide du logiciel FIDAP, une méthode plus fine de modélisation, qui consiste à chercher numériquement une solution approchée des équations de Navier-Stokes associées au modèle k- ϵ dans lesquelles les mobiles d'agitation sont modélisés par des jets. Cette technique nous a permis d'obtenir loin des mobiles des profils de vitesse dans les chenaux d'oxydations avec une erreur par rapport au cas expérimental de l'ordre de 15%.

Il serait intéressant de poursuivre ce travail dans les directions suivantes:

- Introduction d'une équation de transport d'espèce afin de simuler les phénomènes réactionnels qui interviennent dans les chenaux d'oxydation.
- Introduction d'une équation de transport afin de prendre en compte les phénomènes de transfert gaz-liquide dans le cas d'une faible rétention gazeuse [BAKKER, 1991].
- Affinage des conditions aux limites utilisées pour la modélisation des mobiles d'agitation et étude de la validité des champs de turbulence obtenus lors de la simulation des chenaux d'oxydation.

BIBLIOGRAPHIE

- AMANO R.S., GOEL P. (1984)
 A numerical study of a separating and reattaching flow by using Reynolds-stress turbulence closure.
 Numerical heat transfer, vol 7, pp 343-357.
- BAKKER A., Van den AKKER H.E.A. (1991)
 A computational study on dispersing gas in a stirred reactor.
 7th European congress on mixing, Burgge
- BERTRAND J.L. (1987)
 Etude de l'écoulement créé dans un chenal d'oxydation par des aérateurs de surface et des agitateurs immergés.
 D.E.A. INITRTS, Strasbourg.
- BIRD, STEWART, LIGHTFOOT (1960)
 Transport phenomena.
 Wiley.
- BROOKS A.N., HUGHES T.J.R (1982)
 Streamline upwind/Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows.
 Computational method in applied mechanical engineering, pp 30.
- BRUXELMANE M. (1976)
 Le mouvement des fluides dans les cuves agitées.
 Symposium international du génie chimique: L'agitation dans l'industrie chimique. Université de Louvain, Belgique.
- CANTWEL B.J (1981)
 Organized motion in turbulent flow.
 Ann. Rev. fluid Mech. vol 13 pp 457-515.
- CHABARD J.P., DAUBERT O., GOUTAL N. (1989)
 Cours de simulation numérique du LNH notions de base sur l'analyse numérique.
 Direction des études et recherche. EDF 1989.
- CHIENG C.C., LAUNDER B.E. (1980)
 On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion.
 Numerical heat transfer, vol 3, pp 189-207.
- CLER A. (1982)
 Modélisation de la turbulence dans le cadre des fermetures en un point. Calcul d'échelle de temps et de longueur.
 Thèse de docteur ingénieur présentée à l'ENSAE.
- COMOLET R. (1981)
 Mécanique des fluides. 3^{ieme} édition, Masson.
- DALY B.J, HARLOW F.H. (1970)
 Transport equations in turbulence.
 The physics of fluids. vol 13 number 11 pp 2634-2649.
- DAVIS J.T. (1972)
 Turbulence phenomena.
 Academic Press.

- DAVYDOV B.I. (1959)
On statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid.
Soviet physics Doklady, vol 4 pp 769-772.
- DAVYDOV B.I. (1959)
On the statistical theory of turbulence.
Soviet physics Doklady vol 4 pp 779-781.
- DAVYDOV B.I. (1961)
On statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid.
Soviet physics Doklady, vol 6 number 1 pp 10-12.
- DEMBO R.S., EISENSTAT S.C., STEIHAUG T. (1982)
Inexact newton methods.
SIAM journal on numerical analysis. vol 19 no 2 pp 400-408.
- FORT I. (1971)
Liquid circulation in a system with axial mixer and radial baffles.
Collection Czechoslov. Chemical. Communications vol 36 PP 164-185.
- FORT I. (1986)
Flow and turbulence in vessels with axial impeller.
Mixing: theory and practice vol III PP 133-197, Academic press.
- FORT I. (1989)
Liquid circulation in cylindrical vessel with radial baffles and inclined blade impeller.
Collection Czechoslov. Chem. Communications, vol 54 PP 1599-1611.
- GIBSON M.M., LAUNDER B.E. (1978)
Grounds effects on pressure fluctuation in the atmospheric boundary layer.
J. fluid Mech. vol 86 part 3 pp 491-511.
- GRESHO P.M., CHAN S.T., LEE R.L., UPSON C.D. (1984)
A modified finite element method for solving the time dependent incompressible Navier-Stokes equation.
Internationnal journal of numerical methods in fluid, vol 4, PP 557.
- HANJALIC K., LAUNDER B.E. (1972)
A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows.
J. fluids Mech. vol 52 part 4 pp 609-638.
- HANJALIC K., LAUNDER B.E. (1972)
Fully developed asymmetric flow in a plane channel.
J. fluids Mech. vol 51 part 2 pp 301-335.
- HINZE O. (1959)
Turbulence.
Mac Graw Hill, New York.
- JONES W.P., LAUNDER B.E. (1972)
The prediction of laminarization with a two equation model of turbulence.
Int. J. heat mass transfer vol 15 pp 301-314.

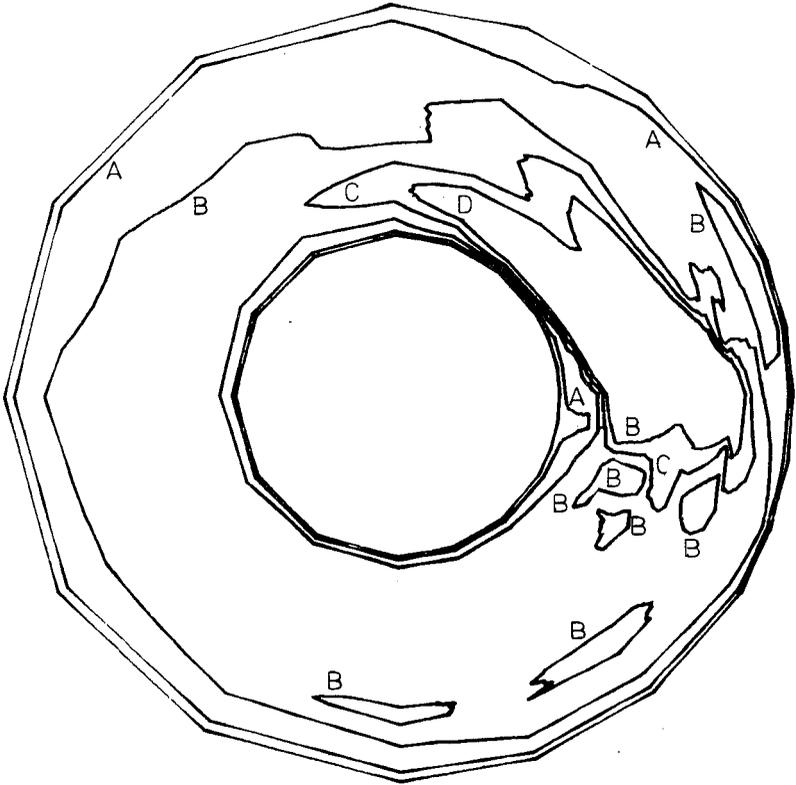
- KLINE S.J., REYNOLDS W.C., SCHRAUB F.A., RUNSTADLER P.W. (1967).
The structure of turbulent boundary layers.
J. fluids Mech. vol 30 part 4 pp 741-773.
- LAUFER J. (1954)
Natl. Advisory comm. Aeronaut. Tech. Repts. N° 1174.
- LAUNDER B.E., SPALDING D.B. (1972)
Turbulence models and their application to the prediction of flow.
Heat and fluid flow, vol 2, pp 43-54.
- LAUNDER B.E., SPALDING D.B.(1973)
The numerical computation of turbulent flows.
Computers methods in applied mechanics and engineering, pp 269-289.
- LAUNDER B.E. (1975)
On the effect of a gravitational field on the turbulent transport.
J. fluids Mech. vol 67 part 3 pp 569-581.
- LAUNDER B.E. (1981)
A generalised algebraic stress transport hypothesis.
AIAA journal vol 20 no 3 pp 436-437.
- LAUNDER B.E., REECE G.J., RODI W. (1975)
Progress in the developpement of a Re-stress turbulence closure.
J. fluids Mech. vol 68 part 3 pp 537-566.
- LAUNDER B.E., SAMARAWEERA D.S.A. (1979)
Application of a second-moment turbulence closure to heat and mass
transport in thin shear flows.
Int. j. Heat Mass Transfer. Vol 22 pp 1631-1643.
- LAUNDER B.E., REYNOLDS W.C., RODI W., MATHIEU J., JEANDEL D. (1984)
Modèles de turbulence et leurs applications.
Collection de la direction des études et recherches d'électricité de
France, Eyrolles.
- LUMLEY J.L. (1978)
Computational modeling of turbulent flows.
Advances in applied mechanics. vol 18 pp 123-176.
- LUMLEY J.L., KHAJEH-NOURI B. (1974)
Computational modeling of turbulent transport.
Adv. Geophys. vol 18 pp 169-192.
- LUMLEY J.L., NEWMAN G.R. (1977)
The return to isotropy of homogeneous turbulence.
J. fluid Mech. vol 82 part 1 pp 161-178.
- LUMLEY J.L., ZEMAN O., SEISS J. (1978)
The influence of buoyancy on turbulent transport.
J. fluid Mech. vol 84 part 3 pp 581-597.
- MEZIANE A. (1988)
Circulation et aération engendrée par des mobiles d'agitation
immergés à axe horizontal dans un chenal d'oxydation.
Thèse de Docteur-ingenieur INSA Toulouse.

- NALLASAMY M. (1987)
Turbulence models and their applications to the prediction of internal flow : a review.
Computers and fluids. vol 15 no 2 pp 151-194.
- NAOT D., SHAVIT A., WOLFSHTEIN M. (1973)
Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses.
The physics of fluids. vol 16 number 6 pp 738-743.
- NIKURADSE J. (1926)
Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten strömungen, forschungsarbeiten auf dem gebietedes ingenieurwesens.
VDI 281.
- PERRY, CHILTON (1973)
Chemical engineers' handbook.
Fifth edition , Mc Graw Hill.
- PIRONNEAU O. (1988)
Méthode des éléments finis pour les fluides.
Masson.
- RASCHID-SALLY L. (1984)
Circulation et aération engendrées par des jets liquides dans un chenal d'oxydation.
Thèse de docteur-ingénieur INSA Toulouse.
- REYNOLDS W.C. (1976)
Computation of turbulent flow.
Annu. Rev. fluid Mech. vol 8 pp 183-208.
- RODI W. (1980)
Turbulence models and their application in hydraulics : a state of the art review.
Sonderforschungsbereich 80 University of Karlsruhe.
- ROTTA J. (1951)
Statistische theorie nichthomogener turbulenz.
Zeitschrift für physik vol 129 pp 547-572.
- SCHUTZ M. (1984)
Strömungsbildner als beschleunigungshilfe in ringförmigen gerinnen.
G.W.F.-Wasser-Abwasser, vol 8, pp 394-398.
- TANNANKORE K.N., STEWARD F.R. (1978)
Comparison of several turbulence models for predicting flow patterns within confined fets.
Canadian journal of chemical engineering vol 56 pp 673-678.
- TENNEKES H., LUMLEY J.L. (1972)
A first course in turbulence.
The MIT Press.
- WYGNANSKI I., FIEDLER H.E. (1970)
J. Fluid Mech., vol. 41, 327.

ANNEXE A1

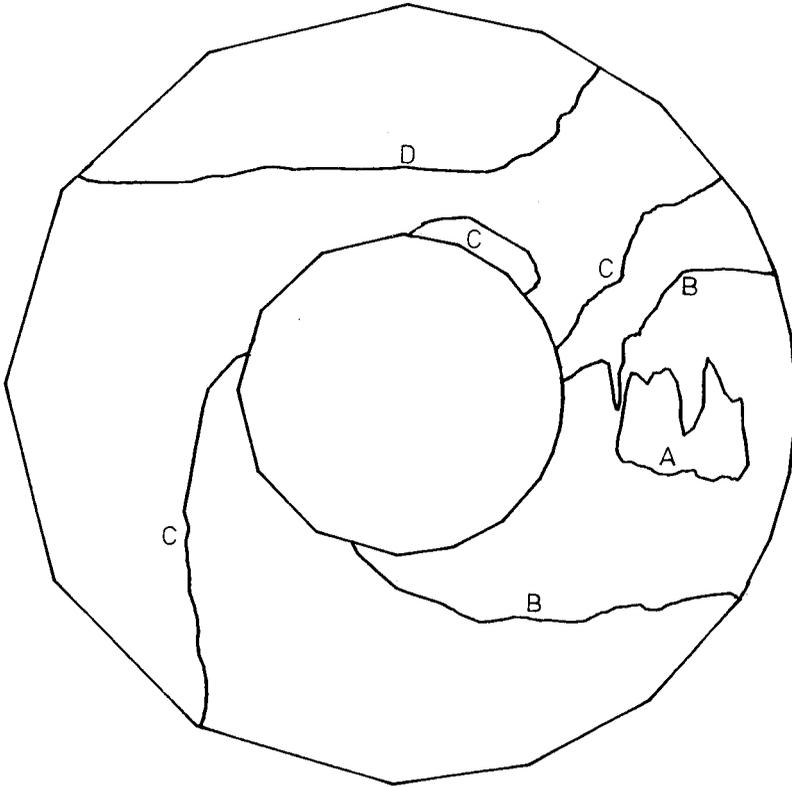
Chenal de 2800 m³ :

Etude de la vitesse de convergence



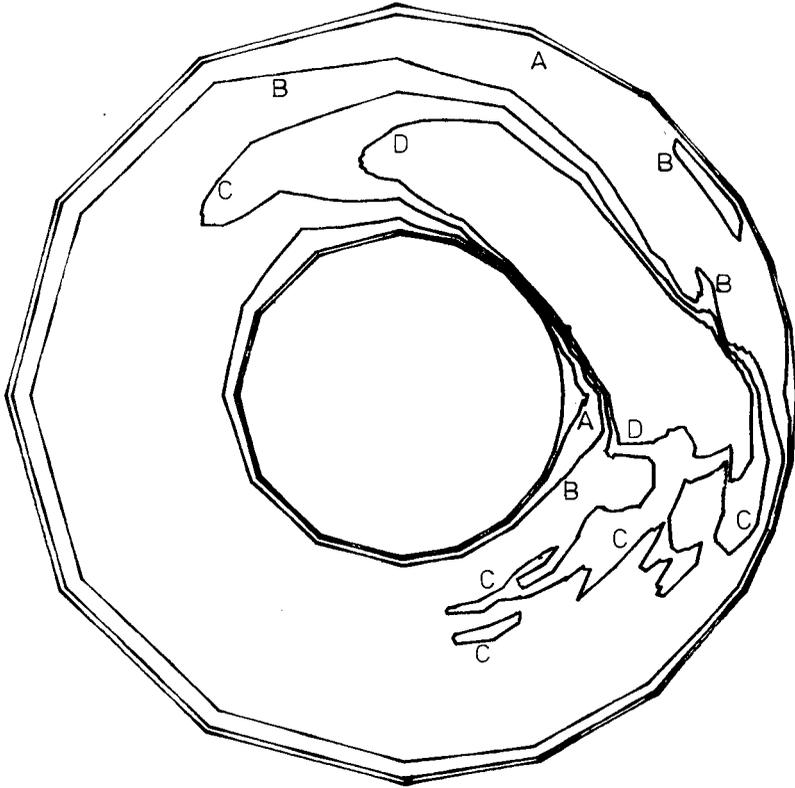
- A 0,05 m/s
- B 0,15 m/s
- C 0,25 m/s
- D 0,35 m/s

Champ de vitesse obtenu après 20 itérations.



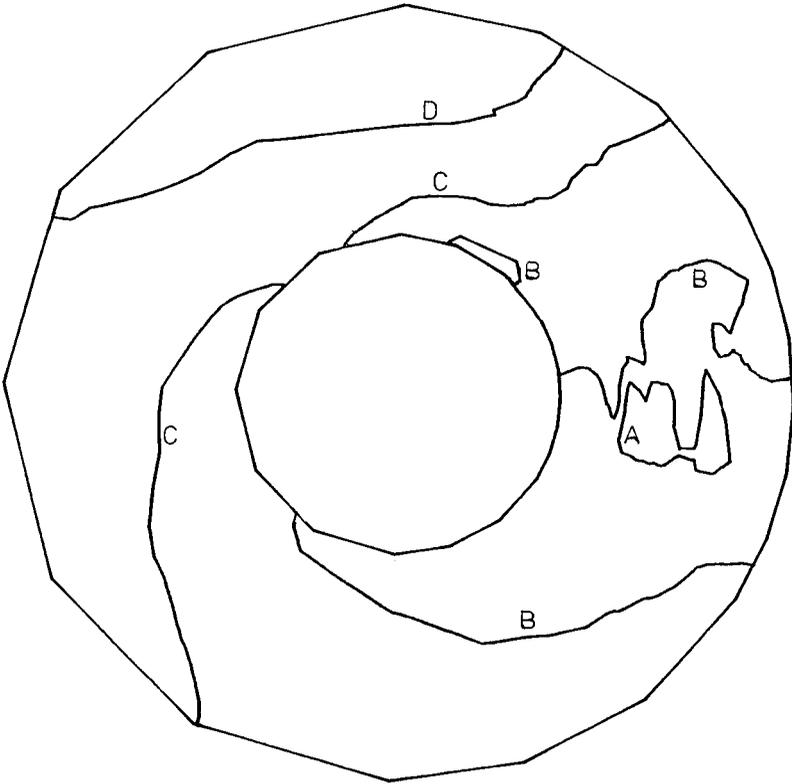
- A -85 Pa
- B -55 Pa
- C -25 Pa
- D 5 Pa

Champ de pression obtenu après 20 itérations.



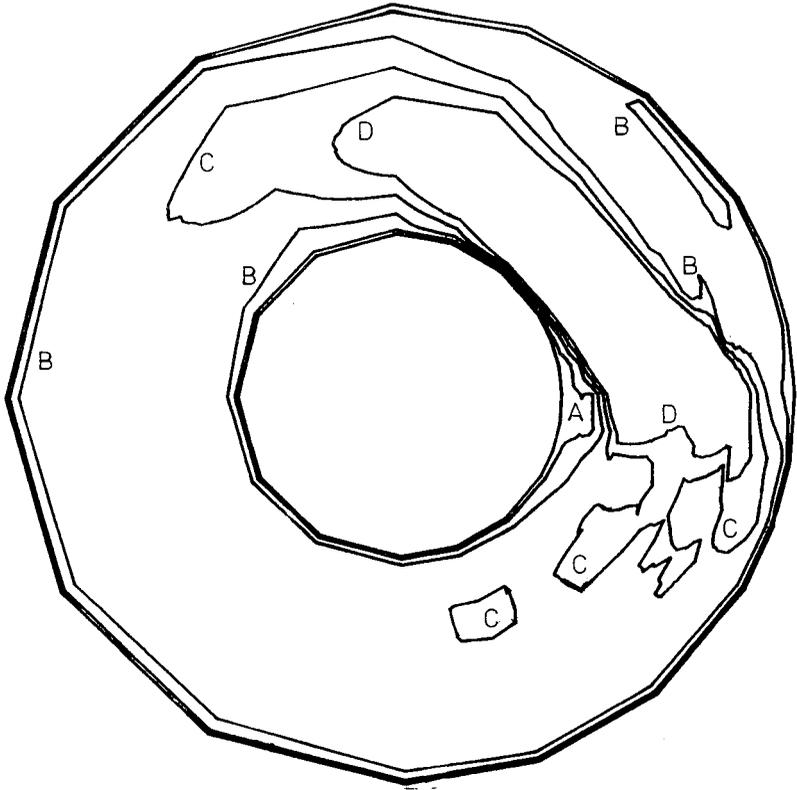
- A 0,05 m/s
- B 0,15 m/s
- C 0,25 m/s
- D 0,35 m/s

Champ de vitesse obtenu après 40 itérations.



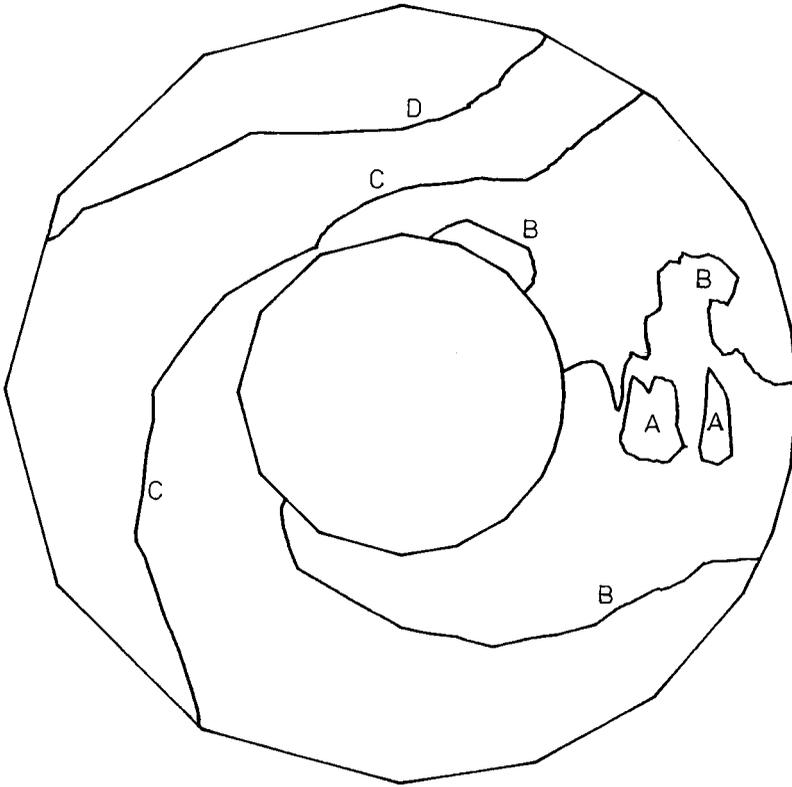
- A -85 Pa
- B -55 Pa
- C -25 Pa
- D 5 Pa

Champ de pression obtenu après 40 itérations.



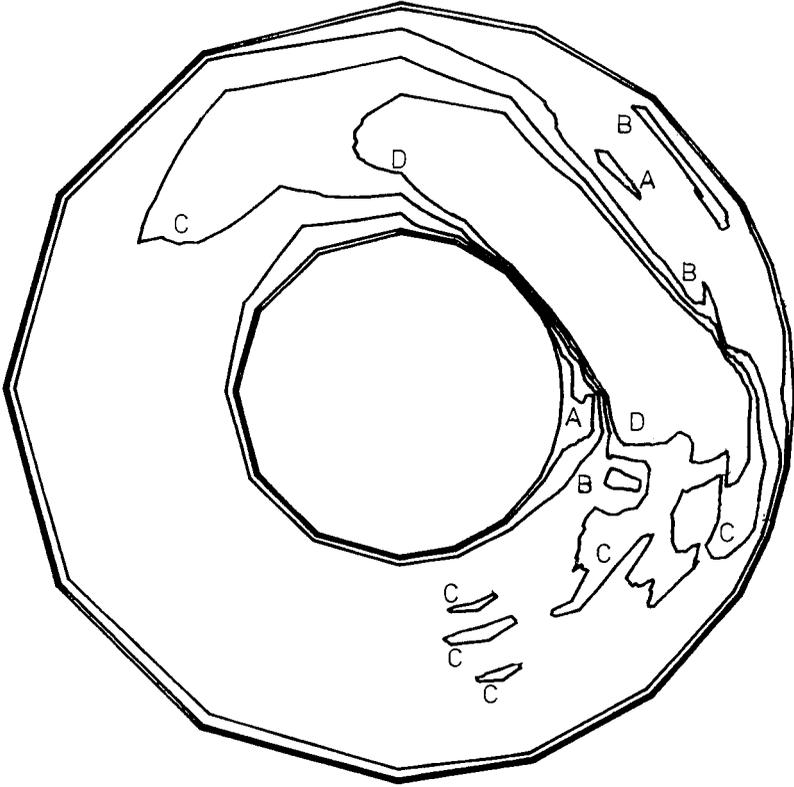
- A 0,05 m/s
- B 0,15 m/s
- C 0,25 m/s
- D 0,35 m/s

Champ de vitesse obtenu après 60 itérations.



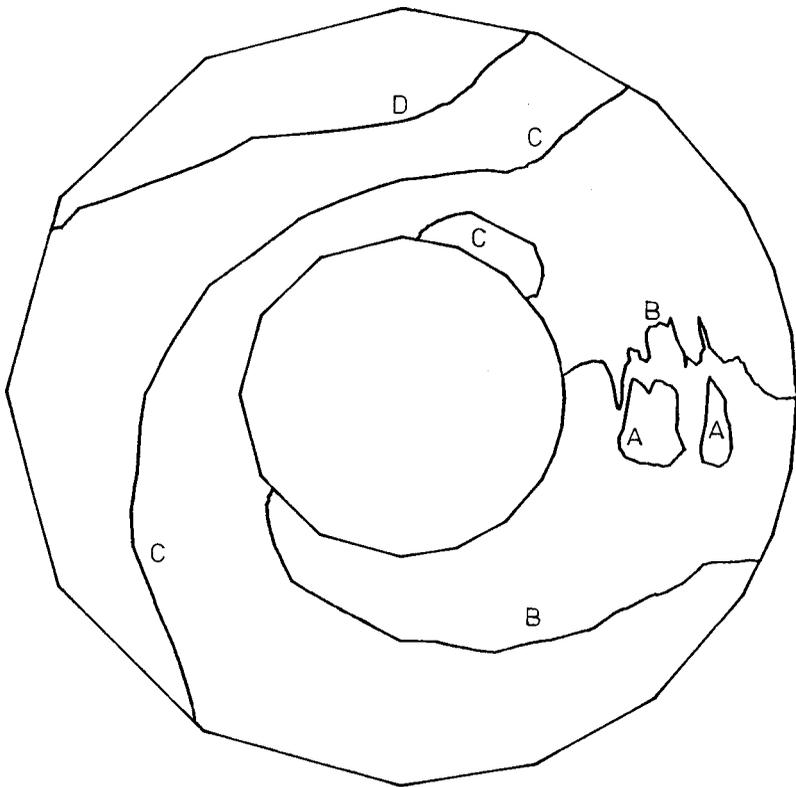
- A -85 Pa
- B -55 Pa
- C -25 Pa
- D 5 Pa

Champ de pression obtenu après 60 itérations.



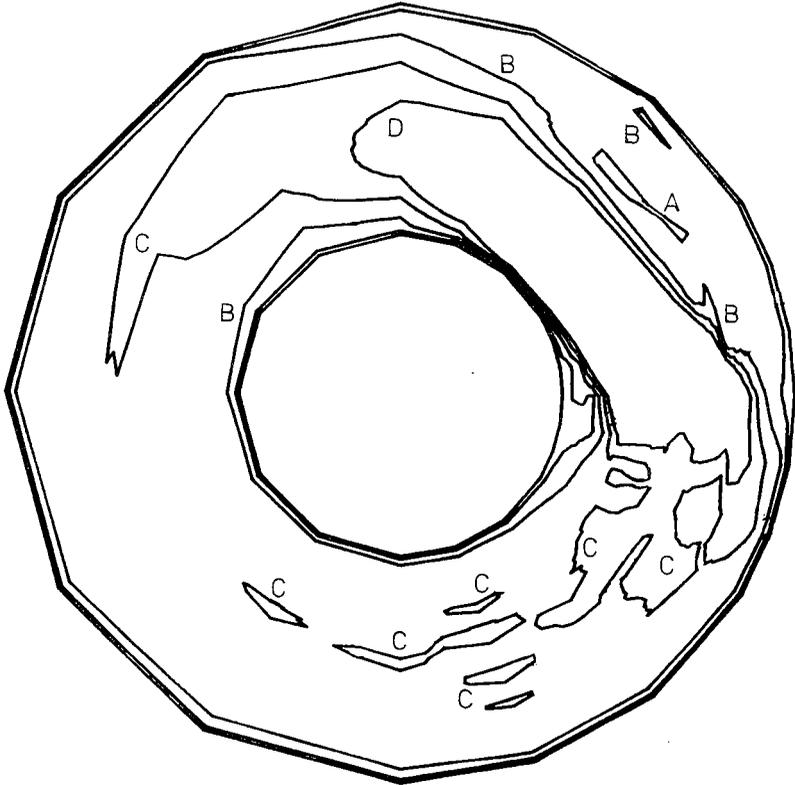
- A 0,05 m/s
- B 0,15 m/s
- C 0,25 m/s
- D 0,35 m/s

Champ de vitesse obtenu après 80 itérations.



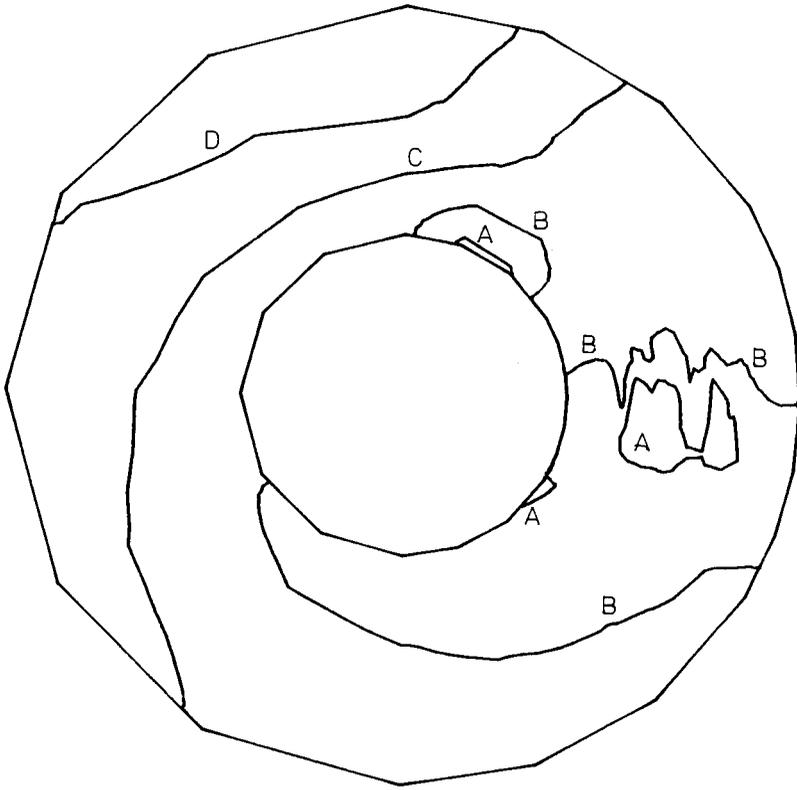
- A -85 Pa
- B -55 Pa
- C -25 Pa
- D 5 Pa

Champ de pression obtenu après 80 itérations.



- A 0,05 m/s
- B 0,15 m/s
- C 0,25 m/s
- D 0,35 m/s

Champ de vitesse obtenu après 100 itérations.

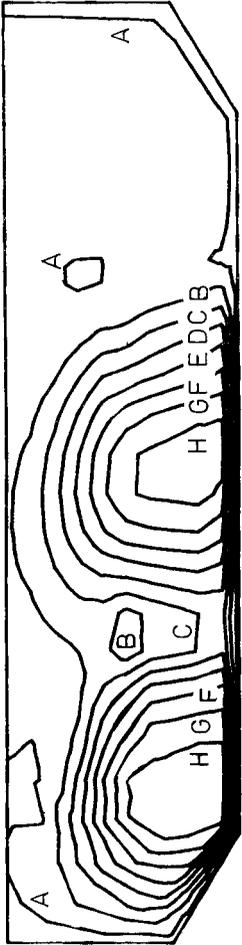


- A -85 Pa
- B -55 Pa
- C -25 Pa
- D 5 Pa

Champ de pression obtenu après 100 itérations.

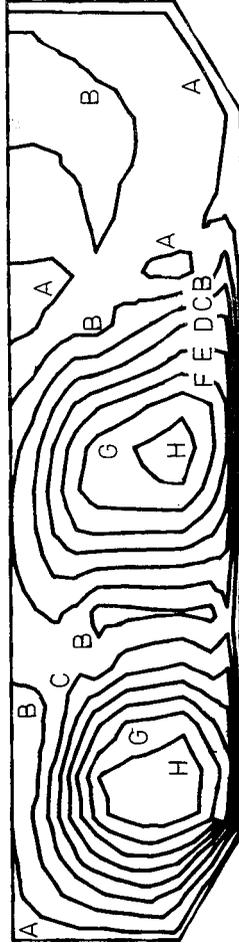
ANNEXE A2

Chenal de 2800 m³ :
Etude de l'influence de la hauteur
des hélices

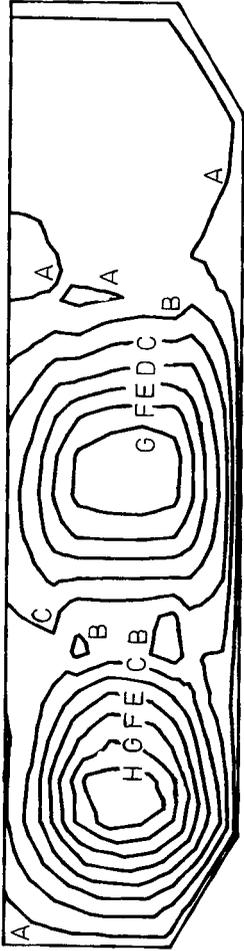


- A 0.05 m/s
- B 0.15 m/s
- C 0.25 m/s
- D 0.35 m/s
- E 0.45 m/s
- F 0.55 m/s
- G 0.65 m/s
- H 0.75 m/s

Champ de vitesse simulé sur la section S_1 du chenal de 2800 m^3
pour une cote de l'axe des hélices de 0.78 m.

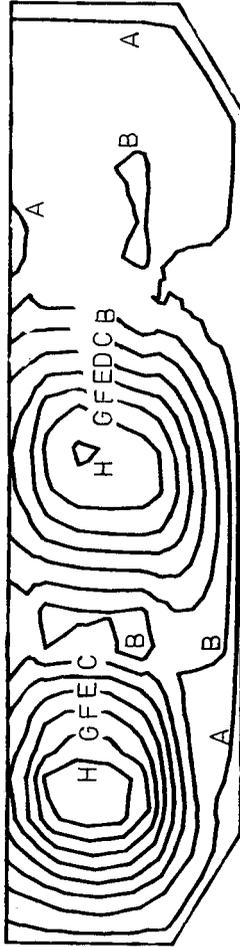


Champ de vitesse simulé sur la section S_1 du chenal de 2800 m^3
pour une cote de l'axe des hélices de 1.08 m.



- A 0,05 m/s
- B 0,15 m/s
- C 0,25 m/s
- D 0,35 m/s
- E 0,45 m/s
- F 0,55 m/s
- G 0,65 m/s
- H 0,75 m/s

Champ de vitesse simulé sur la section S_1 du canal de 2800 m^3
pour une cote de l'axe des hélices de 1,35 m.

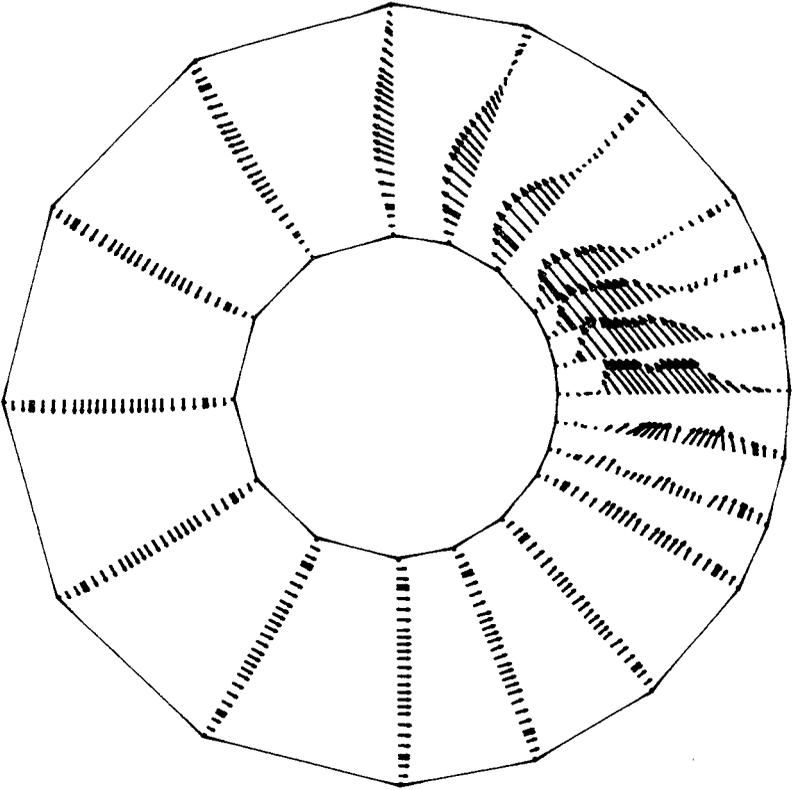


Champ de vitesse simulé sur la section S_1 du canal de 2800 m^3
pour une cote de l'axe des hélices de 1,78 m.

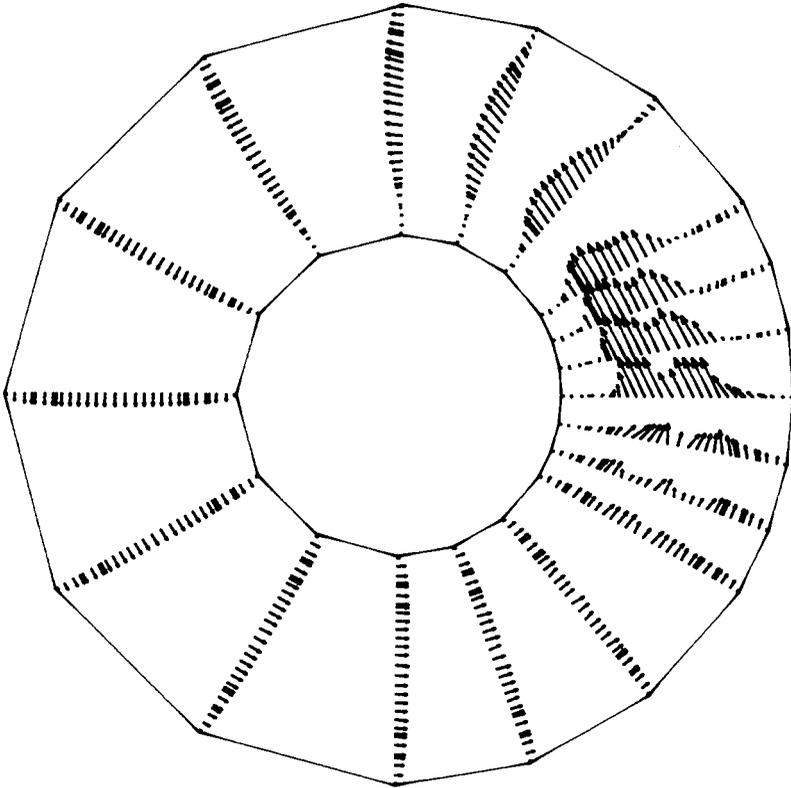
ANNEXE A3

Chenal de 2800 m³ :

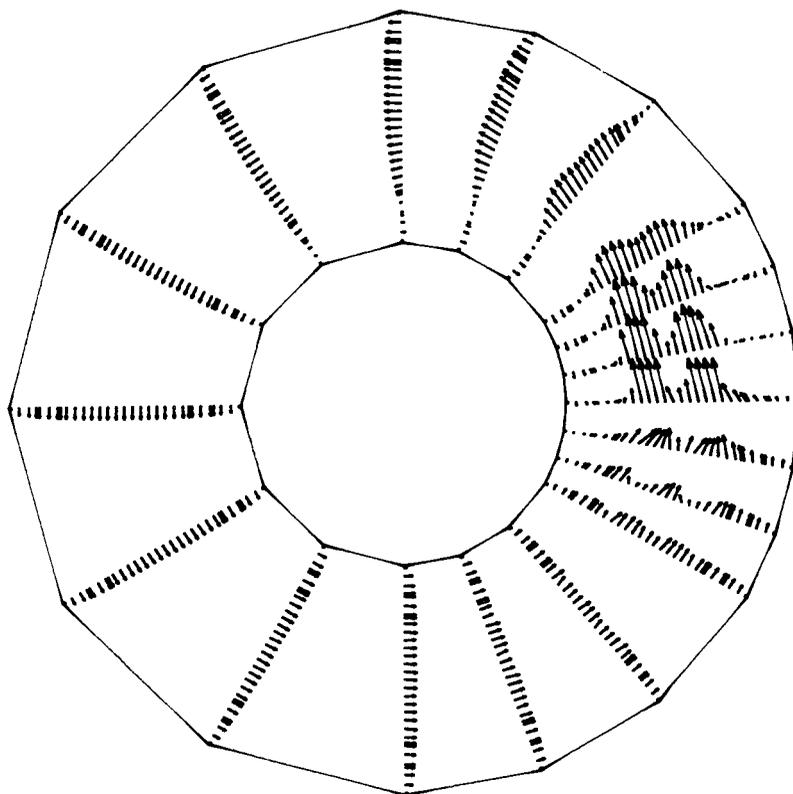
**Etude de l'influence de l'orientation
des hélices**



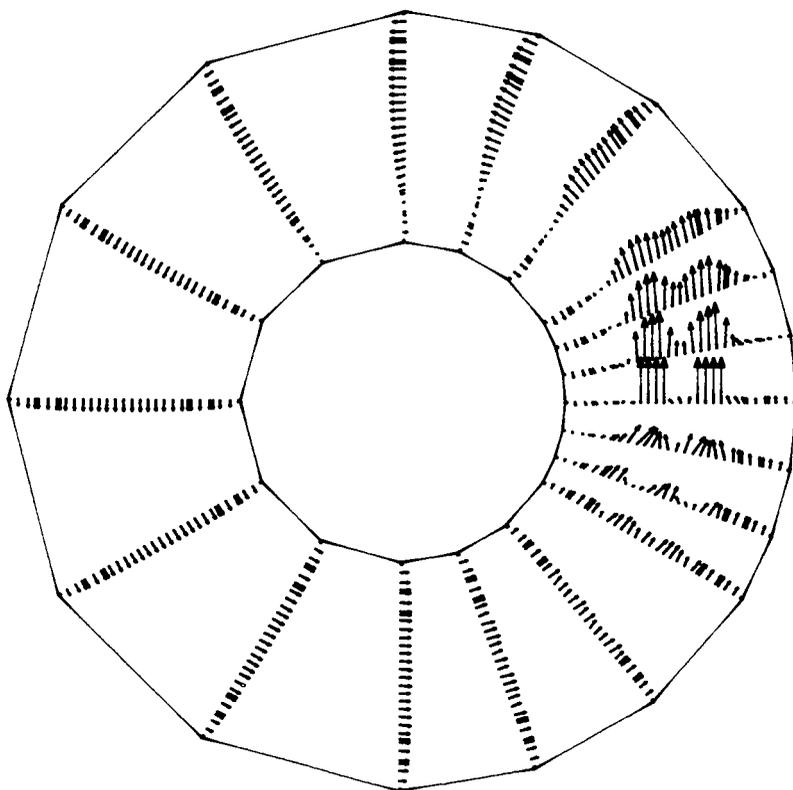
Champ de vitesse obtenu dans le cas où, les hélices étant
parallèles α vaut 38° .



Champ de vitesse obtenu dans le cas où, les hélices étant parallèles α vaut 26° .



Champ de vitesse obtenu dans le cas où, les hélices étant parallèles α vaut 13° .

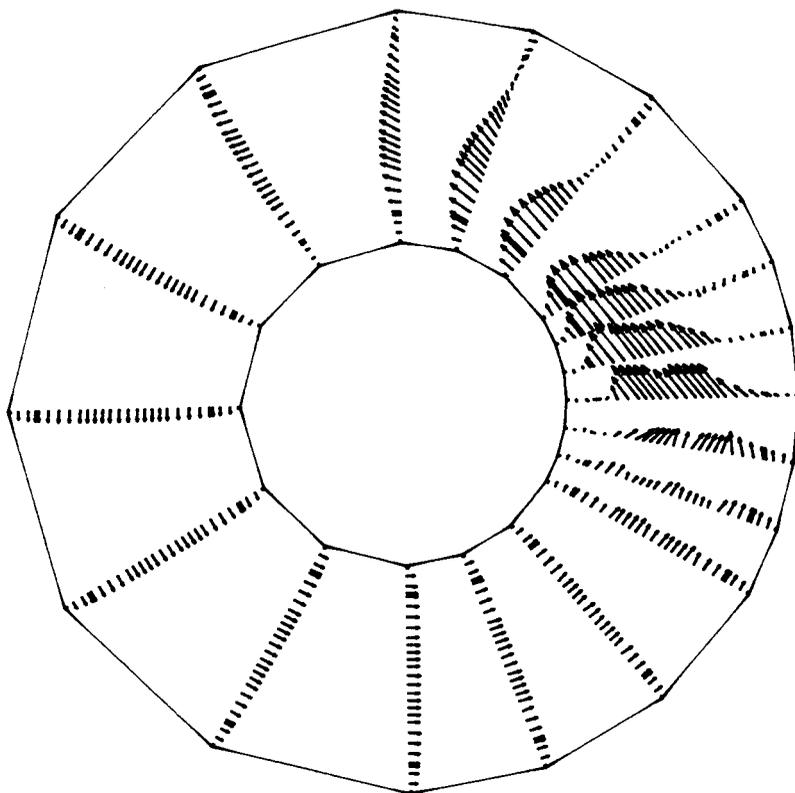


Champ de vitesse obtenu dans le cas où, les hélices étant parallèles α vaut 0° .

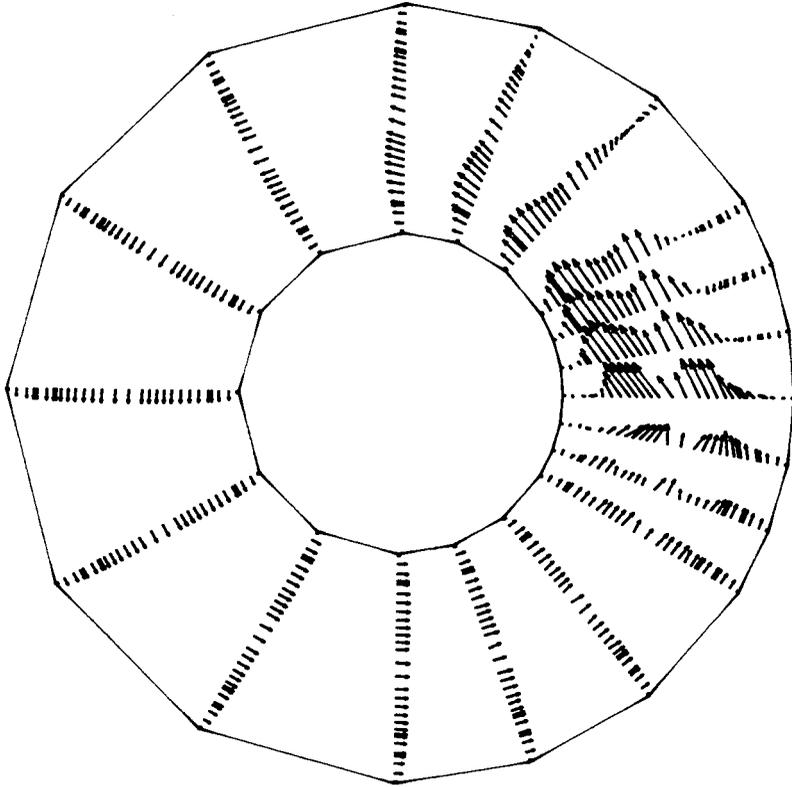
ANNEXE A4

Chenal de 2800 m³ :

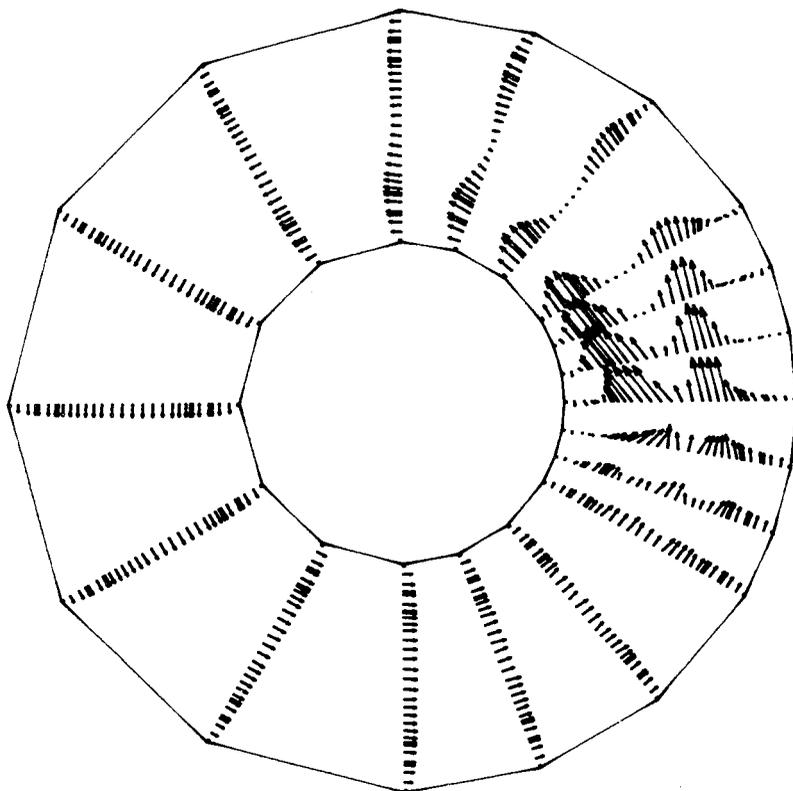
**Etude de l'influence de l'orientation
des hélices dans le cas où l'hélice
intérieure est tangente au bord
intérieur du chenal**



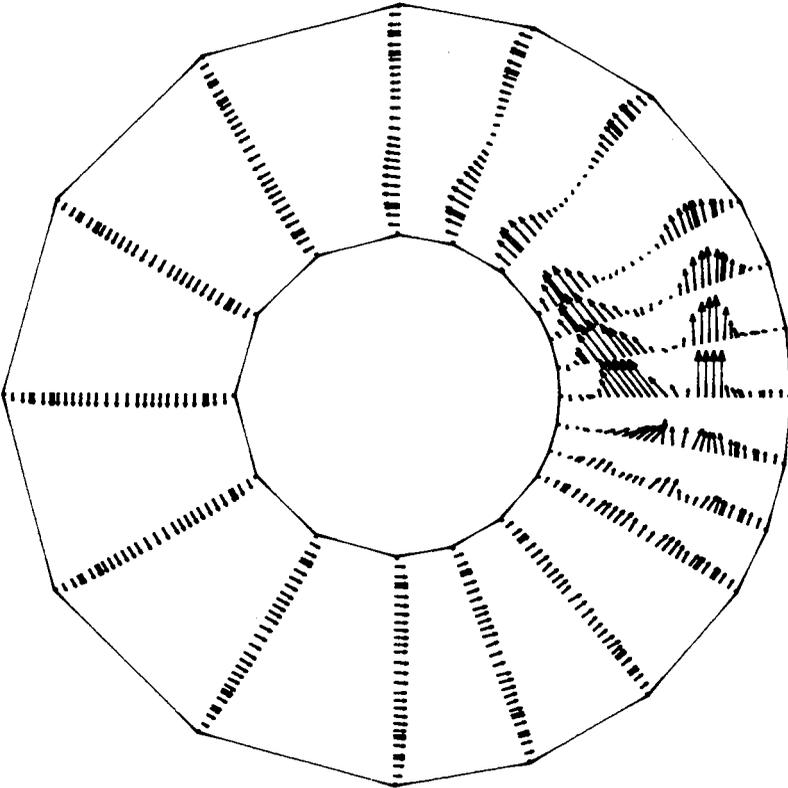
Champ de vitesse obtenu dans le cas où, l'hélice intérieure étant tangente au bord intérieur du chenal, l'orientation de l'hélice extérieure est caractérisée par un angle α de 38° .



Champ de vitesse obtenu dans le cas où, l'hélice intérieure étant tangente au bord intérieur du chenal, l'orientation de l'hélice extérieure est caractérisée par un angle α de 26° .



Champ de vitesse obtenu dans le cas où, l'hélice intérieure étant tangente au bord intérieur du chenal, l'orientation de l'hélice extérieure est caractérisée par un angle α de 13° .

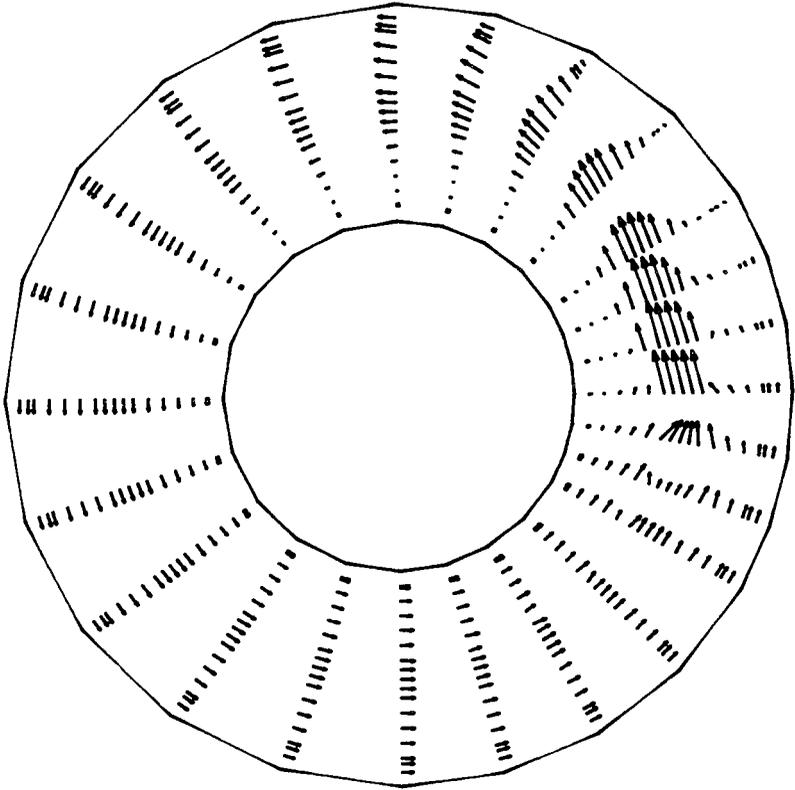


Champ de vitesse obtenu dans le cas où, l'hélice intérieure étant tangente au bord intérieur du chenal, l'orientation de l'hélice extérieure est caractérisée par un angle α de 0° .

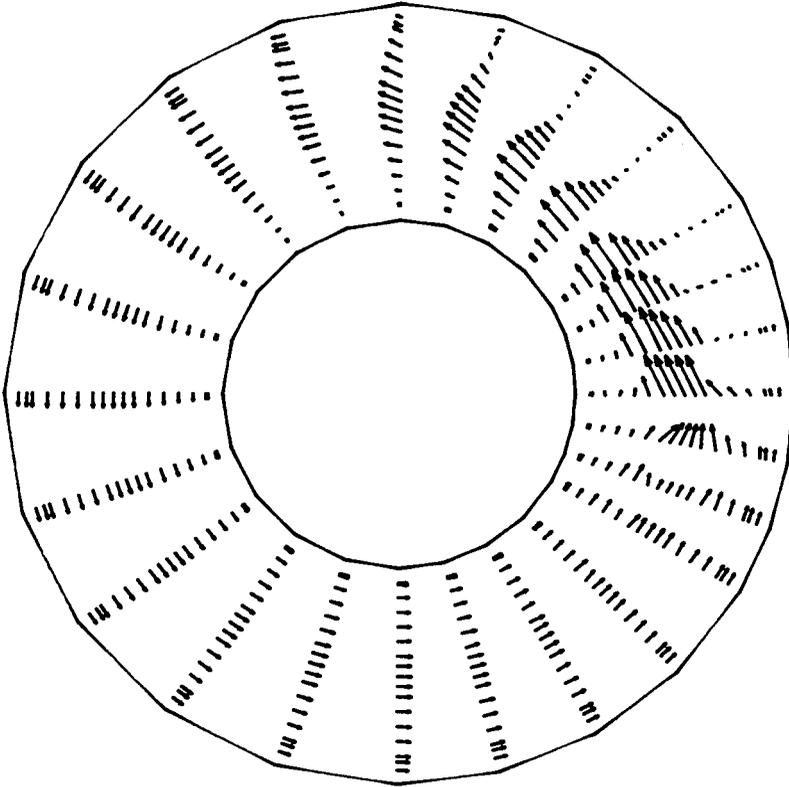
ANNEXE B1

Chenal de 860 m³ :

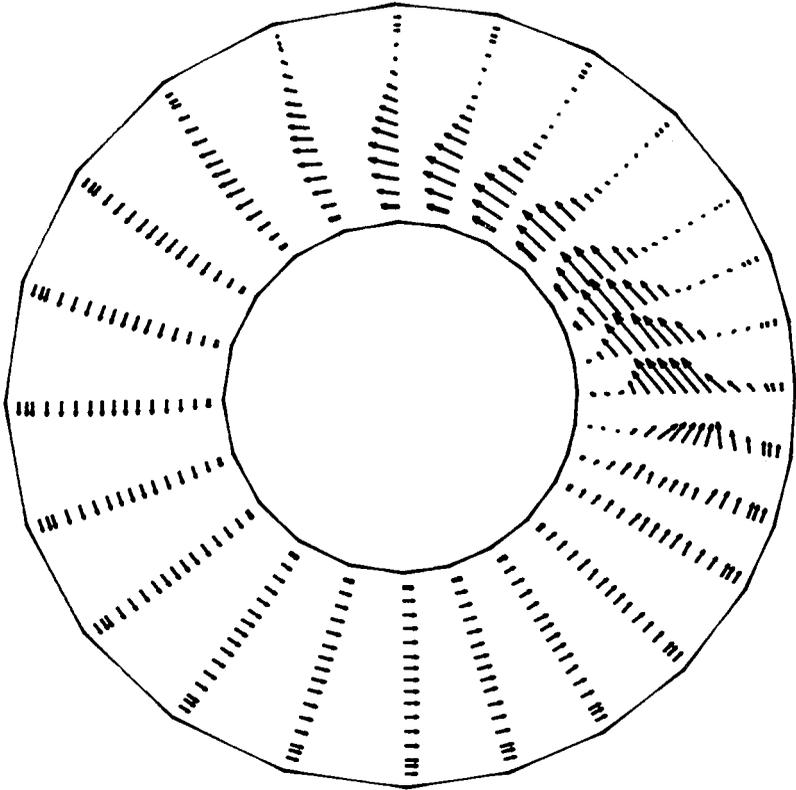
**Etude de l'influence de l'orientation
des hélices**



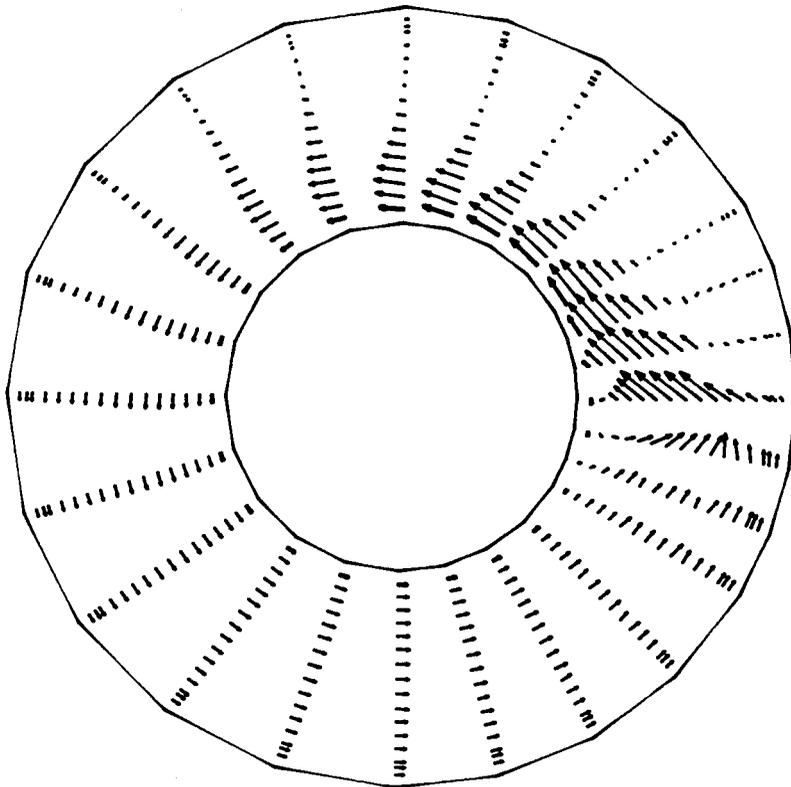
Champ de vitesse obtenu dans le cas où l'orientation de l'hélice est caractérisée par un angle α de 13° .



Champ de vitesse obtenu dans le cas où l'orientation de l'hélice est caractérisée par un angle α de 26° .



Champ de vitesse obtenu dans le cas où l'orientation de l'hélice est caractérisée par un angle α de 39° .

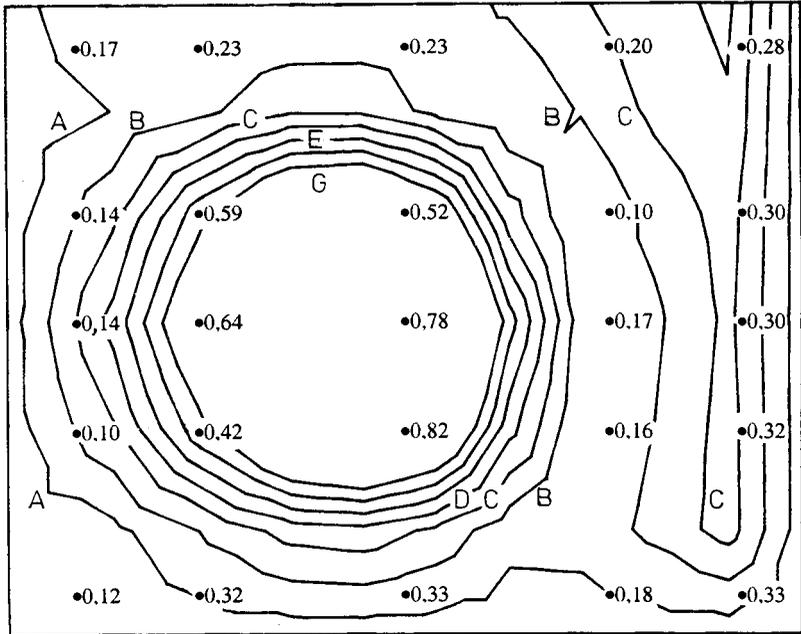


Champ de vitesse obtenu dans le cas où l'orientation de l'hélice est caractérisée par un angle α de 52° .

ANNEXE C1

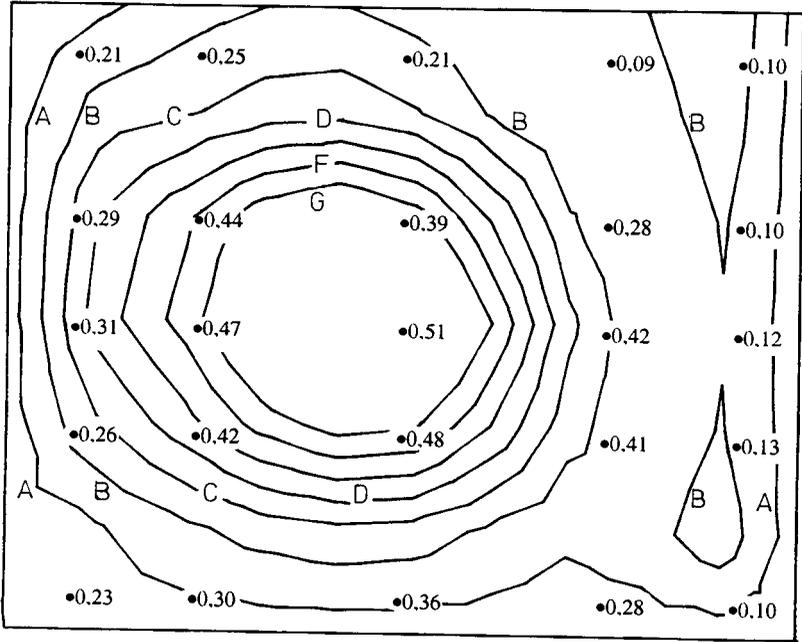
Chenal de 1 m³ :

**Comparaison entre les champs de
vitesse expérimental et simulé**



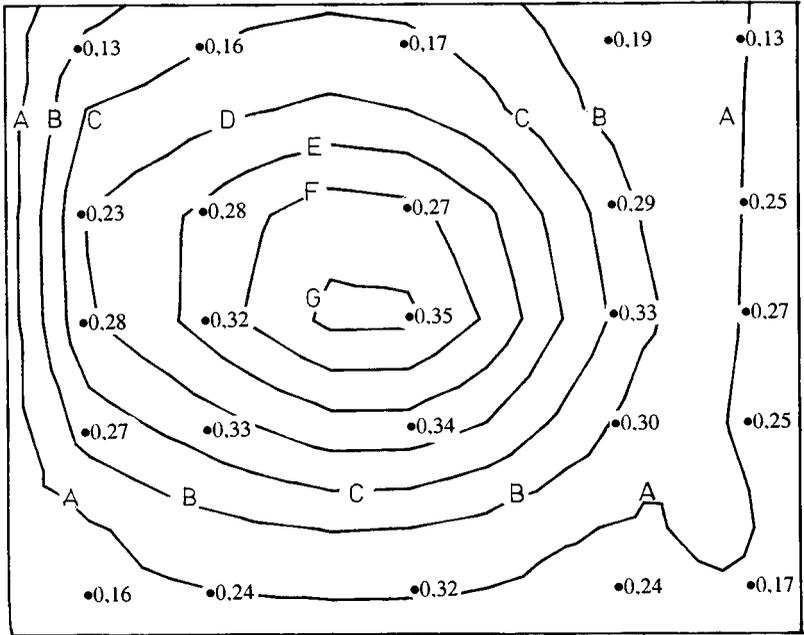
A 0,05 m/s B 0,15 m/s
 C 0,25 m/s D 0,35 m/s
 E 0,45 m/s F 0,55 m/s
 G 0,65 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_1 du chenal de 1 m^3 .



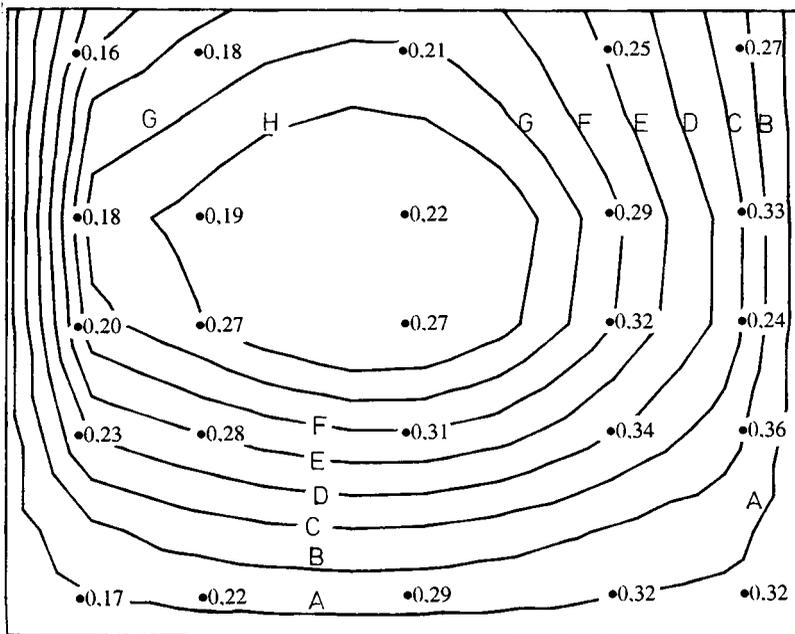
- | | |
|------------|------------|
| A 0.05 m/s | B 0.15 m/s |
| C 0.25 m/s | D 0.35 m/s |
| E 0.45 m/s | F 0.55 m/s |
| G 0.65 m/s | |

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à côté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_2 du chenal de 1 m^3 .



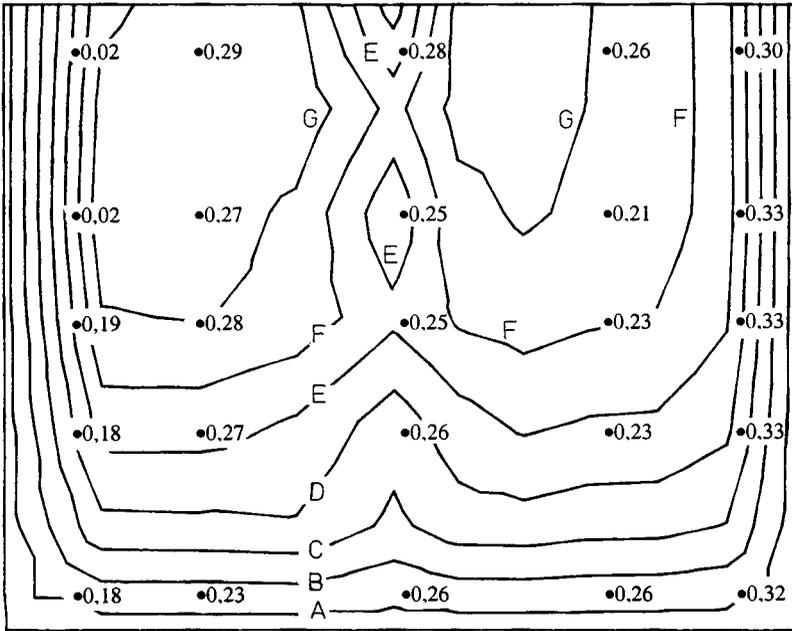
- A 0.05 m/s B 0.15 m/s
- C 0.25 m/s D 0.35 m/s
- E 0.45 m/s F 0.55 m/s
- G 0.65 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_3 du chenal de 1 m^3 .



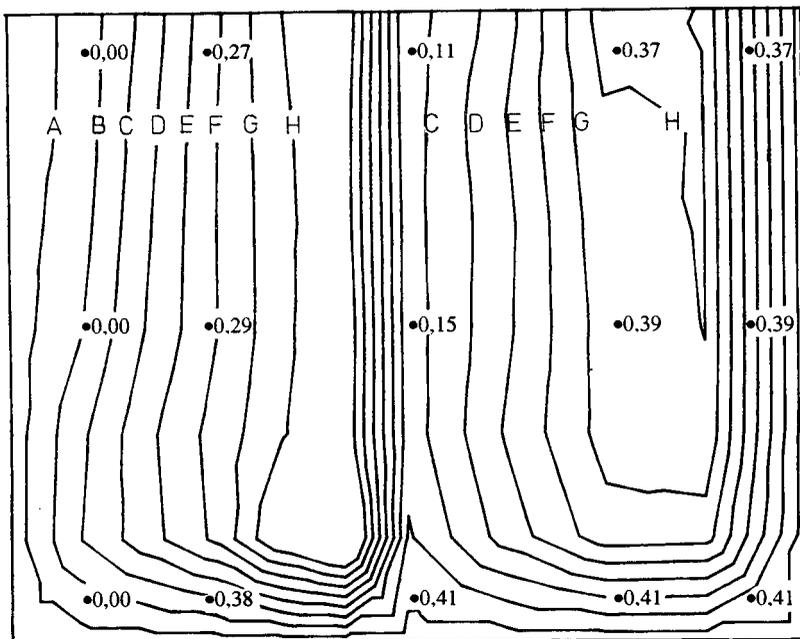
- | | |
|-------------|-------------|
| A 0,025 m/s | B 0,075 m/s |
| C 0,125 m/s | D 0,175 m/s |
| E 0,225 m/s | F 0,275 m/s |
| G 0,325 m/s | H 0,375 m/s |

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_4 du chenal de 1 m^3 .



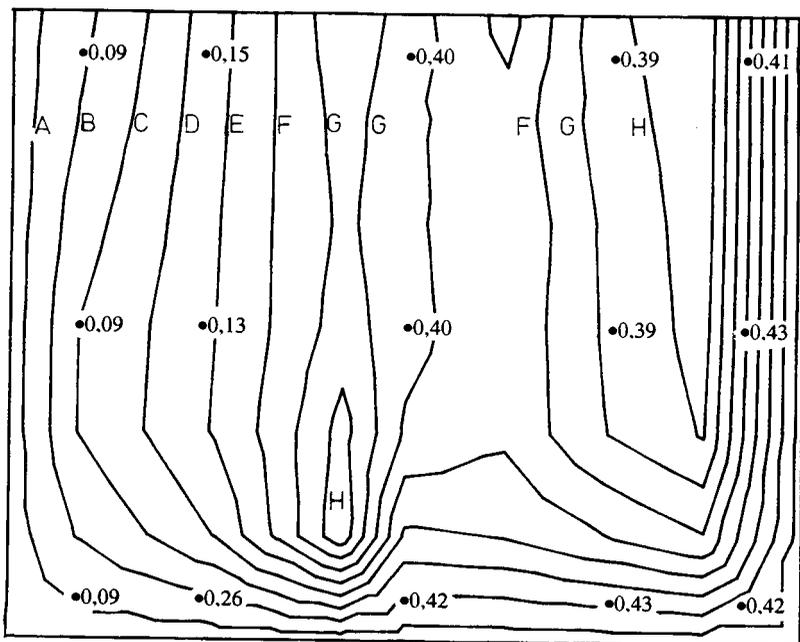
A 0.025 m/s B 0.075 m/s
 C 0.125 m/s D 0.175 m/s
 E 0.225 m/s F 0.275 m/s
 G 0.325 m/s H 0.375 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_6 du chenal de 1 m^3 .



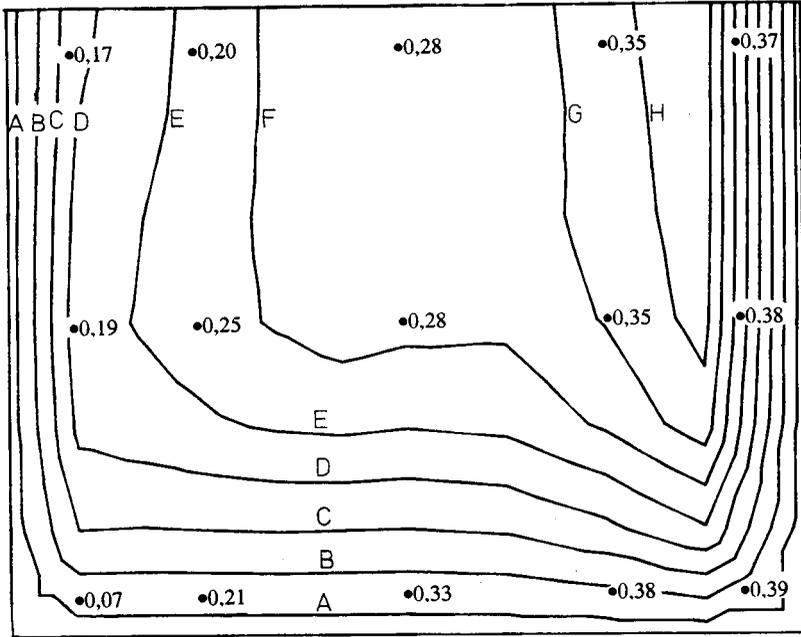
A 0,025 m/s	B 0,075 m/s
C 0,125 m/s	D 0,175 m/s
E 0,225 m/s	F 0,275 m/s
G 0,325 m/s	H 0,375 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_7 du chenal de 1 m^3 .



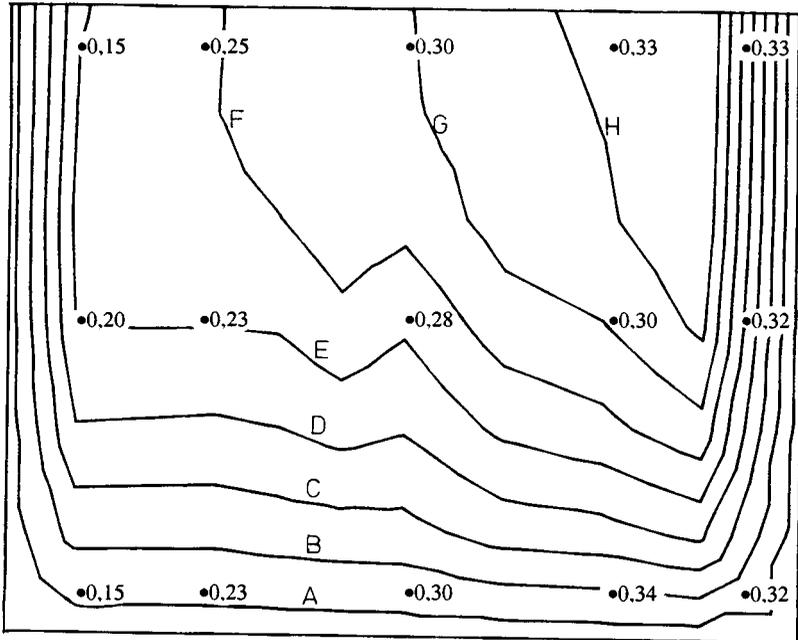
A 0,025 m/s	B 0,075 m/s
C 0,125 m/s	D 0,175 m/s
E 0,225 m/s	F 0,275 m/s
G 0,325 m/s	H 0,375 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à côté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_8 du chenal de 1 m^3 .



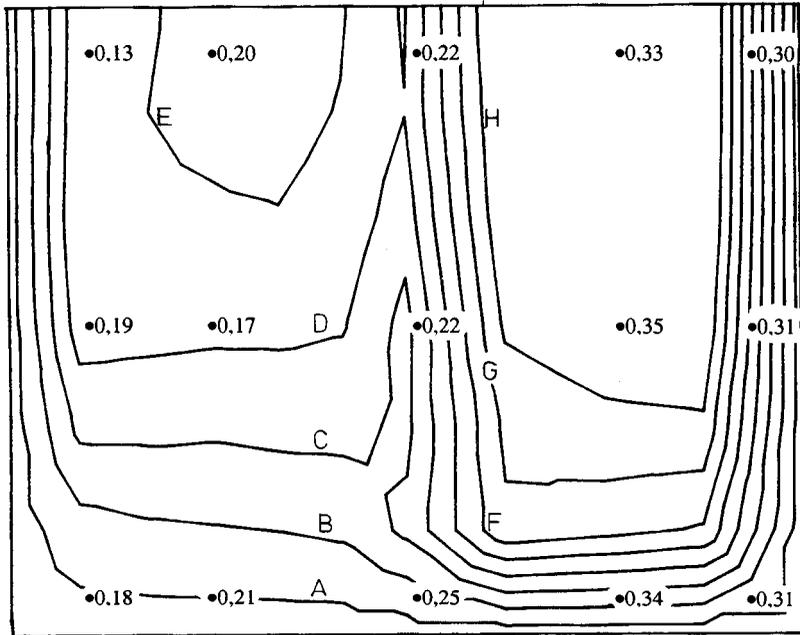
A 0,025 m/s	B 0,075 m/s
C 0,125 m/s	D 0,175 m/s
E 0,225 m/s	F 0,275 m/s
G 0,325 m/s	H 0,375 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_0 du chenal de 1 m^3 .



A 0.025 m/s B 0.075 m/s
 C 0.125 m/s D 0.175 m/s
 E 0.225 m/s F 0.275 m/s
 G 0.325 m/s H 0.375 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_{10} du chenal de 1 m³.



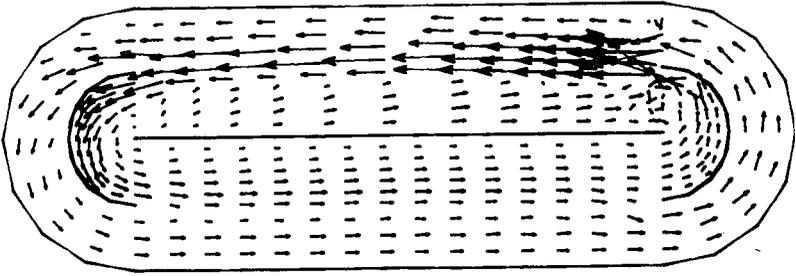
A 0,025 m/s	B 0,075 m/s
C 0,125 m/s	D 0,175 m/s
E 0,225 m/s	F 0,275 m/s
G 0,325 m/s	H 0,375 m/s

Comparaison entre les champs de vitesse expérimental (valeurs mentionnées à coté des points) et simulé (courbes iso-vitesse) sur la section S_{11} du chenal de 1 m^3 .

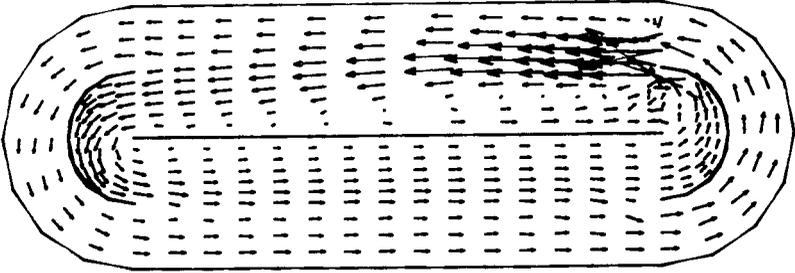
ANNEXE C2

Chenal de 1 m³ :

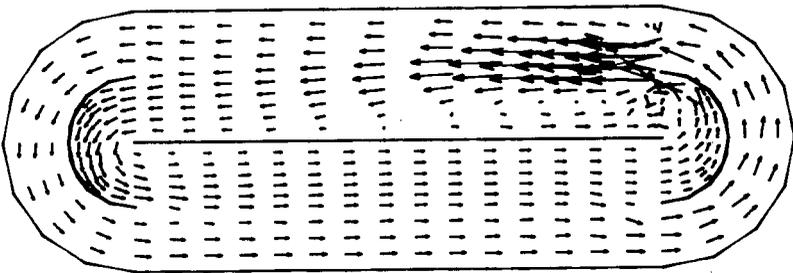
Etude de la vitesse de convergence



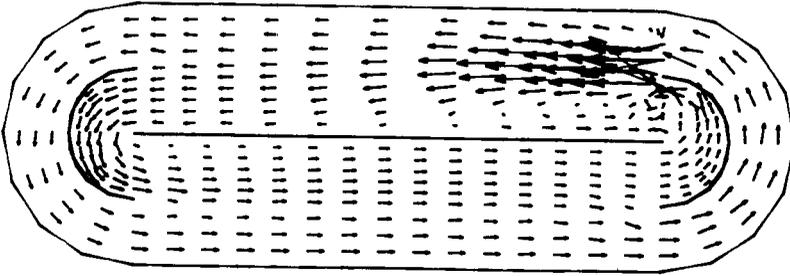
Champ de vitesse obtenu après 20 itérations.



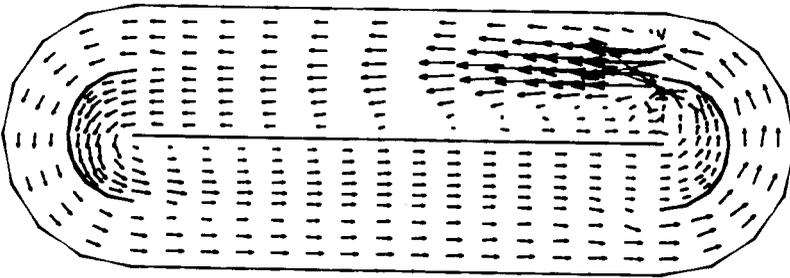
Champ de vitesse obtenu après 40 itérations.



Champ de vitesse obtenu après 60 itérations.



Champ de vitesse obtenu après 80 itérations.



Champ de vitesse obtenu après 100 itérations.